

Titre: Simulation de phénomènes instationnaires périodiques avec une
Title: méthode RANS dans le domaine fréquentiel

Auteur: Frédéric Plante
Author:

Date: 2017

Type: Mémoire ou thèse / Dissertation or Thesis

Référence: Plante, F. (2017). Simulation de phénomènes instationnaires périodiques avec
Citation: une méthode RANS dans le domaine fréquentiel [Master's thesis, École
Polytechnique de Montréal]. PolyPublie. <https://publications.polymtl.ca/2528/>

 **Document en libre accès dans PolyPublie**
Open Access document in PolyPublie

URL de PolyPublie: <https://publications.polymtl.ca/2528/>
PolyPublie URL:

**Directeurs de
recherche:** Éric Laurendeau
Advisors:

Programme: Génie mécanique
Program:

UNIVERSITÉ DE MONTRÉAL

SIMULATION DE PHÉNOMÈNES INSTATIONNAIRES PÉRIODIQUES AVEC UNE
MÉTHODE RANS DANS LE DOMAINE FRÉQUENTIEL

FRÉDÉRIC PLANTE
DÉPARTEMENT DE GÉNIE MÉCANIQUE
ÉCOLE POLYTECHNIQUE DE MONTRÉAL

MÉMOIRE PRÉSENTÉ EN VUE DE L'OBTENTION
DU DIPLÔME DE MAÎTRISE ÈS SCIENCES APPLIQUÉES
(GÉNIE MÉCANIQUE)
AVRIL 2017

UNIVERSITÉ DE MONTRÉAL

ÉCOLE POLYTECHNIQUE DE MONTRÉAL

Ce mémoire intitulé :

SIMULATION DE PHÉNOMÈNES INSTATIONNAIRES PÉRIODIQUES AVEC UNE
MÉTHODE RANS DANS LE DOMAINE FRÉQUENTIEL

présenté par : PLANTE Frédéric

en vue de l'obtention du diplôme de : Maîtrise ès sciences appliquées

a été dûment accepté par le jury d'examen constitué de :

M. PELLETIER Dominique, Ph. D., président

M. LAURENDEAU Éric, Ph. D., membre et directeur de recherche

M. GERMAIN Patrick D., Ph. D., membre

REMERCIEMENTS

Je tiens à remercier mon directeur de recherche, Éric Laurendeau, pour son encadrement tout au long de la réalisation de ce projet. Il a su m'orienter et me conseiller lors de la réalisation de ces travaux. Je le remercie particulièrement pour les opportunités de stage et de collaboration internationale qu'il a ajoutées à ces travaux de maîtrise.

Je remercie le département d'aérodynamique avancé de Bombardier Aéronautique pour l'intérêt et le support, technique et financier, apporté à ce projet.

Je remercie également le Conseil de Recherches en Sciences Naturelles et en Génie du Canada (CRSNG) et le Fonds de Recherche Nature et Technologies du Québec (FRQNT) pour leur support financier qui a permis la réalisation de ce projet.

Ce projet a aussi été rendu possible par une étroite collaboration avec mes collègues, développeurs du logiciel NSCODE.

Finalement, je souhaite remercier ma famille et tout particulièrement mes parents pour leur support au cours de ces années d'études.

RÉSUMÉ

Dans le but d'augmenter l'utilisation des simulations instationnaires dans l'industrie aéronautique, ce mémoire présente le développement d'une méthode dans le domaine fréquentiel pour la résolution de phénomènes périodiques en temps. Cette approche utilise des séries de Fourier pour transformer les équations RANS instationnaires (URANS) en une série de problèmes stationnaires dans le domaine fréquentiel. Cette méthode est bien adaptée pour les cas ayant une fréquence imposée. Pour les phénomènes où la fréquence est une solution du problème, comme le lâcher tourbillonnaire d'un cylindre, deux méthodes décrites dans la littérature sont implémentées et étudiées. La méthode fréquentielle est appliquée à deux modèles de turbulence, soit le modèle Spalart-Allmaras et le modèle Menter $k-\omega$ *SST*. Les cas d'applications montrent l'importance de prendre en compte le phénomène de Gibbs dans le sillage. Un problème de stabilité lors de la résolution du modèle de turbulence est aussi observé et une solution est proposée.

Ces méthodes sont implémentées dans le logiciel de dynamique des fluides numérique, NS-CODE, développé à Polytechnique Montréal. Il s'agit d'un solveur volume fini centré aux cellules avec une résolution ségréguée des modèles de turbulence. Les méthodes implémentées sont vérifiées et validées par une comparaison avec des solutions de la méthode *Dual Time Stepping*, une méthode de calcul classique pour les écoulements instationnaires, et des résultats de la littérature. Parmi les cas tests utilisés, des solutions d'écoulements autour de profils oscillants en régime non visqueux et turbulent sont présentées. Ces cas tests vont jusqu'à la simulation du décrochage dynamique avec le modèle URANS. Afin de démontrer la capacité du solveur pour simuler des géométries ayant un mouvement relatif, le cas d'un aileron oscillant est simulé avec la technique de maillage chimère.

Pour finir, le tremblement transsonique sur un profil OAT15A est simulé. L'effet de la résolution en temps et en maillage est étudié avec la méthode *Dual Time Stepping*. Les solutions obtenues concordent avec l'expérience et des résultats numériques de la littérature. Ce cas est ensuite simulé avec la méthode fréquentielle, montrant la capacité du solveur pour la simulation de phénomènes turbulents de fréquence non imposée.

ABSTRACT

In an effort to increase modeling capabilities within the industrial aerospace community to time-periodic phenomena, this thesis presents the development of frequency domain approaches towards the simulation of unsteady turbulent periodic flows. The time-domain Unsteady Reynolds-Averaged Navier-Stokes (URANS) equations are transformed, via Fourier series, into a steady state frequency domain formulation at fixed frequency. This allows the computation of forced oscillations problems. For problems where the time period is solution of the problem, such as the unsteady wake behind a cylinder, two algorithms proposed in the literature are examined. Also, the implementation of the frequency domain method to 2 widely used turbulence models, namely the Spalart-Allmaras and Menter k- ω SST models, is discussed. The study highlights the importance of adequately addressing the Gibb's phenomena in wake regions. A stability issue for the resolution of the turbulence model is also reported and a solution is proposed.

The developments are made into the CFD software developed at Polytechnique Montreal, NSCODE. The latter is a cell-centered finite volume solver with a segregated resolution of the turbulence model. Verification and validation are made by comparison with the classical dual time stepping scheme and results from the literature. Of the test cases used, oscillating profiles in inviscid and turbulent regime in condition up to dynamic stall are presented. The simulation of a flapping aileron using the chimera grid technique is used to show the capability of the method to handle relative motion between objects.

Finally, the case of the transonic buffet over the OAT15A airfoil is studied. A time resolution and grid convergence study is carried showing results in agreement to numerical and experimental results from the literature. This case is also computed using the frequency domain scheme demonstrating the capacity of the proposed method to simulate time periodic turbulent flows of self-defined frequency.

TABLE DES MATIÈRES

REMERCIEMENTS	III
RÉSUMÉ	IV
ABSTRACT	V
TABLE DES MATIÈRES	VI
LISTE DES TABLEAUX	VIII
LISTE DES FIGURES	IX
LISTE DES SIGLES ET ABRÉVIATIONS	XIII
CHAPTER 1 INTRODUCTION	1
1.1 Concepts de base	1
1.1.1 Équations de Navier-Stokes	1
1.1.2 Méthode des volumes finis	2
1.1.3 Modélisation de la turbulence	2
1.1.4 Simulation des écoulements instationnaires	3
1.2 Éléments de la problématique	3
1.3 Objectifs de recherche	4
1.4 Plan du mémoire	4
CHAPTER 2 REVUE DE LITTÉRATURE	6
2.1 Tremblement transsonique	6
2.1.1 Tremblement bidimensionnel	7
2.1.2 Tremblement tridimensionnel	7
2.2 Schéma de résolution dans le domaine fréquentiel	8
2.2.1 Discrétisation temporelle	8
2.2.2 Schéma de résolution	10
2.2.3 Repliement de spectre	11
2.2.4 Phénomène de Gibbs	12
2.2.5 Adaptation de la période	12
2.2.6 Adaptation du nombre de modes	13

2.2.7	Modélisation de la turbulence	14
2.2.8	Traitement de l'approche de maillage chimère	14
2.2.9	Utilisation des méthodes fréquentielles	16
CHAPTER 3 MÉTHODES NUMÉRIQUES		18
3.1	Solveur NSCODE	18
3.1.1	Schéma de résolution	18
3.1.2	Discretisation temporelle	20
3.1.3	Modèles de turbulence	23
3.2	Implémentation de modèles de turbulence	24
3.2.1	Modification d'Edwards-Chandra	24
3.2.2	Correction de compressibilité	25
3.3	Méthode <i>Time Spectral</i>	27
3.3.1	Discretisation temporelle	27
3.3.2	Schéma de résolution Runge-Kutta	30
3.3.3	Schéma de résolution LU-SGS	38
3.3.4	Adaptation de la période	41
3.3.5	Modèles de turbulence	49
CHAPTER 4 RÉSULTATS NUMÉRIQUES		64
4.1	Cylindre laminaire	64
4.2	Décrochage dynamique	65
4.3	Aileron oscillant	68
4.4	Tremblement transsonique	71
4.4.1	Effet du modèle de turbulence	72
4.4.2	Étude du raffinement du pas de temps	73
4.4.3	Effet du maillage	74
4.4.4	Analyse des résultats	75
4.4.5	Calculs <i>Time Spectral</i>	77
CHAPTER 5 CONCLUSION		82
5.1	Synthèse des travaux	82
5.2	Limitations de la solution proposée	83
5.3	Améliorations futures	84
RÉFÉRENCES		85

LISTE DES TABLEAUX

Tableau 3.1	Temps CPU pour calculer 100 cycles multigrilles	36
Tableau 3.2	Convergence de la période selon le nombre de modes pour le cas du cylindre laminaire	46
Tableau 4.1	Effet du nombre de Reynolds sur les lâchers tourbillonnaires d'un cylindre laminaire	65
Tableau 4.2	Cas tests de décrochage dynamique	67

LISTE DES FIGURES

Figure 2.1	Contours de nombre de Mach et lignes de courant autour du profil NACA0012 en tremblement transsonique	6
Figure 2.2	Principe de résolution dans le domaine fréquentiel	9
Figure 2.3	Méthode d'adaptation de la fréquence	13
Figure 2.4	Maillage chimère (gauche) et conventionnel (droite) du profil McDonnell Douglas 30P30N avec dispositifs hypersustentateurs (extrait de Lévesque (2015))	15
Figure 2.5	Configuration chimère avec (gauche) et sans (droite) cellules dynamiquement masquées/calculées	16
Figure 3.1	Implémentation du schéma NLFD dans un solveur Runge-Kutta . . .	22
Figure 3.2	Vérification de l'implémentation de la modification d'Edwards-Chandra et de la correction de compressibilité du modèle de Spalart-Allmaras .	26
Figure 3.3	Implémentation du schéma TSM dans un solveur Runge-Kutta	31
Figure 3.4	Coefficients aérodynamiques calculés avec la méthode <i>Time Spectral</i> pour le cas du profil NACA0012 oscillant à deux fréquences	32
Figure 3.5	Coefficients aérodynamiques calculés avec la méthode <i>Dual Time Stepping</i> pour le cas du profil NACA0012 oscillant à deux fréquences . . .	33
Figure 3.6	Comparaison des coefficients aérodynamiques avec les schémas DTS et TSM pour le cas du profil NACA0012 oscillant à deux fréquences . .	33
Figure 3.7	Convergence itérative pour le cas du profil NACA0012 oscillant à deux fréquences	34
Figure 3.8	Implémentation du schéma TSM-FFT dans un solveur Runge-Kutta .	35
Figure 3.9	Temps CPU normalisé pour 100 cycles multigrilles	36
Figure 3.10	Convergence modale du coefficient de traînée pour le cas AGARD 5 non visqueux	37
Figure 3.11	Effet du maillage sur le coefficient de traînée pour le cas AGARD 5 non visqueux	38
Figure 3.12	Comparaison des schémas RK et LU-SGS pour le profil NACA0012 en tangage	40
Figure 3.13	Coefficients de portance et de traînée pour le profil NACA0012 en tangage	40
Figure 3.14	Effet de la période sur la convergence du cylindre laminaire	44
Figure 3.15	Illustration du principe de la méthode GBVTP et PBVTP	44

Figure 3.16	Coefficients aérodynamiques pour l'écoulement autour d'un cylindre laminaire	45
Figure 3.17	Convergence de l'écoulement laminaire autour d'un cylindre	45
Figure 3.18	Convergence de la période selon le nombre de modes pour le cas du cylindre laminaire	46
Figure 3.19	Convergence des lâchers tourbillonnaires laminaires du profil NACA0012 selon la période initiale	47
Figure 3.20	Convergence des lâchers tourbillonnaires laminaires du profil NACA0012 selon le nombre de modes	48
Figure 3.21	Coefficients aérodynamiques du profil NACA0012 à haut angle d'attaque	48
Figure 3.22	Convergence modale pour le profil NACA0015 avec $k_c = 0.038$	50
Figure 3.23	Coefficients de portance et de traînée pour le profil NACA0015 avec $k_c = 0.038$	50
Figure 3.24	Convergence itérative pour le profil NACA0015 avec $k_c = 0.038$	51
Figure 3.25	Contours de $\tilde{\nu}$ aux instances de temps 1, 4 et 8 sur 11 pour le profil NACA0015 avec $k_c = 0.038$	52
Figure 3.26	Effet de $\tilde{\nu}_\infty$ sur la convergence du modèle de Spalart-Allmaras avec $k_c = 0.038$	53
Figure 3.27	Effet de $\tilde{\nu}_\infty$ sur l'évolution temporelle de $\tilde{\nu}$ pour le profil NACA0015 avec $k_c = 0.038$	54
Figure 3.28	Effet de $\tilde{\nu}_\infty$ sur les coefficients de portance et de traînée pour le profil NACA0015 avec $k_c = 0.038$	55
Figure 3.29	Convergence modale pour le profil NACA0015 avec $k_c = 0.19$	56
Figure 3.30	Coefficients de portance et de traînée pour le profil NACA0015 avec $k_c = 0.19$	56
Figure 3.31	Convergence itérative pour le profil NACA0015 avec $k_c = 0.19$	57
Figure 3.32	Évolution temporelle de k et ω pour le profil NACA0015 avec $k_c = 0.19$	58
Figure 3.33	Effet du pas de temps en DTS pour le profil NACA0015 avec $k_c = 0.19$	59
Figure 3.34	Convergence itérative des coefficients de portance et de traînée de la méthode TSM pour le profil NACA0015 avec $k_c = 0.19$	59
Figure 3.35	Convergence du cas AGARD 5 turbulent	60
Figure 3.36	Convergence modale des coefficients de portance et de traînée du cas AGARD 5 turbulent	61
Figure 3.37	Contours de $\tilde{\nu}$ pour le cas AGARD 5 turbulent	61
Figure 3.38	Évolution temporelle de $\tilde{\nu}$ pour le cas AGARD 5 turbulent	62

Figure 4.1	Nombre de Strouhal selon le nombre de Reynolds pour le cylindre laminaire	65
Figure 4.2	Coefficient de portance stationnaire du profil NACA0015	67
Figure 4.3	Coefficient de portance en décrochage dynamique pour le profil NACA0015 selon l'angle relatif à l'incidence moyenne	67
Figure 4.4	Assemblage du maillage chimère pour le cas de l'aileron oscillant avec une déflexion de 20°	68
Figure 4.5	Convergence modale sur le maillage grossier pour les cas d'ailerons oscillants	69
Figure 4.6	Effet du maillage pour le cas de l'aileron oscillant avec une amplitude de 3°	69
Figure 4.7	Coefficients de portance et de traînée pour les cas d'aileron oscillant .	70
Figure 4.8	Contours de nombre de Mach et lignes de courant aux instants 3, 6, 9 et 12 sur 15 pour l'aileron oscillant à 20° d'amplitude	71
Figure 4.9	Effet de la variante du modèle de turbulence de Spalart-Allmaras sur la simulation du tremblement transsonique	72
Figure 4.10	Étude de la convergence en temps pour le profil OAT15A en tremblement transsonique	73
Figure 4.11	Convergence itérative des pas de temps en DTS pour le profil OAT15A en tremblement transsonique	74
Figure 4.12	Temps de calcul pour le profil OAT15A en tremblement transsonique	74
Figure 4.13	Effet du maillage sur le calcul du tremblement transsonique	76
Figure 4.14	Coefficients de pression moyen pour le profil OAT15A en tremblement transsonique	76
Figure 4.15	Évolution temporelle du coefficient de portance pour le profil OAT15A en tremblement transsonique	77
Figure 4.16	Convergence itérative de la densité et du nombre de Strouhal du tremblement transsonique calculé avec la méthode TSM	78
Figure 4.17	Convergence itérative du nombre de Strouhal du tremblement transsonique calculé avec la méthode TSM pour différents nombres de Strouhal initiaux	78
Figure 4.18	Coefficients aérodynamiques en tremblement transsonique calculés avec la méthode TSM et DTS	79
Figure 4.19	Coefficients de pression moyen pour le profil OAT15A en tremblement transsonique calculés avec la méthode TSM	80

Figure 4.20	Contours de nombre de Mach et lignes de courant aux instants 1, 5, 10 et 15 sur 21 du tremblement transsonique	81
-------------	---	----

LISTE DES SIGLES ET ABRÉVIATIONS

ADI	Alternating Direction Implicit
BJ-SOR	Block-Jacobi Successive Overrelaxation
CC	Correction de Compressibilité
CFD	Computational Fluid Dynamics
CFL	Courant-Friedrichs-Lewy
CPU	Central Processing Unit
DES	Detached Eddy Simulation
DDES	Delayed Detached Eddy Simulation
DNS	Direct Numerical Simulation
DTS	Dual Time Stepping
EDW	Edwards-Chandra
FFT	Fast Fourier Transform
GBVTP	Gradient Based Variable Time Period
GMRES	Generalized Minimal Residual Method
HB	Harmonic Balance
HDHB	High-Dimensional Harmonic Balance
iFFT	inverse Fast Fourier Transform
IRS	Implicit Residual Smoothing
JST	Jameson-Shmidt-Turkel
LES	Large Eddy Simulation
LU-SGS	Lower-Upper Symmetric Gauss-Seidel
LU-SSOR	Lower-Upper Symmetric Successive Overrelaxation
MATD	Matrix Artificial Dissipation
NLFD	Non-Linear Frequency Domain
PBVTP	Phase Based Variable Time Period
RANS	Reynolds Averaged Navier-Stokes
RK	Runge-Kutta
SA	Spalart-Allmaras
TSM	Time Spectral Method
TSV	Time Spectral Viscosity
TSPP	Time Steps Per Period
URANS	Unsteady Reynolds Averaged Navier-Stokes
ZDES	Zonal Detached Eddy Simulation

CHAPITRE 1 INTRODUCTION

Au cours des dernières décennies, le développement de la dynamique des fluides numérique et l'augmentation des ressources de calcul disponibles ont permis d'intégrer des méthodes de calcul haute fidélité dans le développement des aéronefs. Ces calculs présentent un intérêt industriel important puisqu'ils permettent de diminuer l'utilisation d'essais en soufflerie. Ces derniers sont trop longs et coûteux pour l'exploration d'un vaste espace de conception. Ainsi, l'emploi de la CFD dans les processus de conception en aérospatiale permet d'augmenter les performances aérodynamiques et la sécurité en vol tout en réduisant le temps et les coûts de développement de produit.

1.1 Concepts de base

1.1.1 Équations de Navier-Stokes

En dynamique des fluides, les équations de Navier-Stokes décrivent le comportement d'un fluide visqueux et compressible. Ces équations, modélisant la conservation de la masse, de la quantité de mouvement et de l'énergie, s'appliquent donc à de nombreuses applications d'ingénierie. Dans leur forme intégrale bidimensionnelle, ces équations s'écrivent (Blazek, 2005) :

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{\Omega} U d\Omega + \oint_{\partial\Omega} (F_C - F_V) dS = 0 \quad (1.1)$$

avec U le vecteur des valeurs conservatives, F_C les flux convectifs et F_V les flux visqueux.

$$U = [\rho, \rho u, \rho v, \rho E]^t \quad (1.2)$$

$$F_C = [\rho V, \rho u V + n_x p, \rho v V + n_y p, \rho H V]^t \quad (1.3)$$

$$F_V = [0, n_x \tau_{xx}, n_y \tau_{xy}, n_x \tau_{yx} + n_y \tau_{yy}, n_x \Theta_x + n_y \Theta_y]^t \quad (1.4)$$

où

$$\Theta_x = u\tau_{xx} + v\tau_{xy} + k\frac{\partial T}{\partial x} \quad (1.5)$$

$$\Theta_y = u\tau_{yx} + v\tau_{yy} + k\frac{\partial T}{\partial y} \quad (1.6)$$

Avec $V = n_x u + n_y v$ la vitesse contravariante et $H = E + \frac{p}{\rho}$ l'enthalpie totale. On considère un gaz parfait, de telle sorte que :

$$E = \frac{p}{\rho(\gamma - 1)} + \frac{u^2 + v^2}{2} \quad (1.7)$$

1.1.2 Méthode des volumes finis

Il existe de nombreuses méthodes pour résoudre les équations de Navier-Stokes (éléments finis, différences finies, volumes finis, etc.). De celles-ci, la méthode des volumes finis est populaire pour les applications aéronautiques. Cette méthode utilise un maillage afin de séparer le domaine de calcul en cellules qui forment les volumes de contrôle de l'équation 1.1. Les flux visqueux et convectifs sont alors intégrés sur la frontière des volumes de contrôle afin de former le résidu $R(U) = \oint_{\partial\Omega} (F_C - F_V) dS$ de telle sorte que l'on obtient l'équation :

$$\Omega \frac{\partial U}{\partial t} + R(U) = 0 \quad (1.8)$$

Deux types de maillage peuvent être utilisés, soit des maillages structurés et non structurés. Dans le cas des maillages structurés, chacun des points du maillage peut être identifié de façon unique par un index i, j, k qui définit sa position dans l'espace topologique. Les cellules sont donc des quadrilatères en 2D et des hexaèdres en 3D. Dans le cas des maillages non structurés, les points du maillage n'ont pas un ordre explicite. Des structures de données supplémentaires sont donc requises pour définir la connectivité entre les points dans le maillage. Dans ce cas, le maillage peut être formé d'éléments ayant une variété de géométrie. Dans le cas de ce mémoire, on utilise une approche de maillage structuré. Celle-ci simplifie la programmation, mais pose des contraintes supplémentaires lors de la génération des maillages.

1.1.3 Modélisation de la turbulence

La CFD emploie une variété de modèles allant des modèles potentiels aux modèles DNS (Direct Numerical Simulation) en passant par une panoplie de modèles intermédiaires. En régime visqueux, ces derniers sont départagés par l'échelle des tourbillons modélisés et, par

conséquent, non résolus dans la discrétisation des équations de Navier-Stokes. Le coût de calcul augmente donc avec la diminution de l'échelle du plus petit tourbillon calculé puisque des maillages et des pas de temps plus fins sont requis. L'approche *Reynolds Averaged Navier-Stokes* (RANS) est la plus souvent employée pour la résolution d'écoulement turbulent dans le domaine aéronautique. Cette méthode moyenne les fluctuations de l'écoulement dû à la turbulence et utilise un modèle de turbulence. En outre, les équations RANS admettent des solutions stationnaires, contrairement aux méthodes résolvant les fluctuations turbulentes ce qui rend leur utilisation efficace pour de nombreuses applications.

Les travaux présentés dans ce mémoire utilisent l'hypothèse de Boussinesq (*Eddy-viscosity hypothesis*) qui modélise la turbulence par une viscosité turbulente $\mu = \mu_l + \mu_t$ où μ_l est la viscosité du fluide et μ_t est la contribution du modèle de turbulence. Cette approche est fréquemment employée dans l'industrie aéronautique et une grande variété de modèles sont disponibles pour l'évaluation de la viscosité turbulente.

1.1.4 Simulation des écoulements instationnaires

Afin de résoudre les équations RANS pour les écoulements instationnaires (URANS), une approche possible est d'employer un pas de temps global. Cette méthode peut s'avérer coûteuse puisque le pas de temps global doit respecter les critères de stabilité du schéma d'intégration temporel pour toutes les cellules du maillage. On peut aussi discrétiser le terme de dérivée temporelle séparément afin de résoudre les équations avec un schéma en pseudo-temps. Cette méthode est appelée *Dual Time Stepping* (Jameson, 1991). D'autres approches reposent sur une méthode de collocation pour évaluer la dérivée temporelle avec une sélection d'instances de temps. Les méthodes fréquentielles *Non-Linear Frequency Domain* (NLFD), *Harmonic Balance* (HB) et *Time Spectral* (TSM) font partie de ces dernières et seront détaillées dans ce mémoire.

1.2 Éléments de la problématique

L'application de la CFD dans les cycles de conception est limitée par le coût de calcul élevé des simulations. Au cours des dernières années, l'augmentation de la puissance de calcul disponible et de l'efficacité des algorithmes de calcul ont permis une utilisation massive des calculs RANS stationnaires pour la conception de produits aéronautiques. Cependant, les calculs instationnaires demeurent trop coûteux pour une utilisation à grande échelle. En effet, les techniques les plus répandues procèdent en calculant successivement une série de pas de temps. Il est donc nécessaire d'utiliser de petit pas de temps pour obtenir une précision

adéquate. Aussi, lorsqu'un phénomène périodique est étudié, plusieurs périodes doivent être simulées afin d'éliminer les comportements transitoires et obtenir le régime périodique de l'écoulement. Une autre limitation de ces méthodes est l'impossibilité de paralléliser le calcul dans la dimension temporelle puisque chacun des pas de temps dépend des pas de temps antérieurs. Ainsi, certaines disciplines comme l'aéroélasticité et la dynamique du vol doivent employer des essais physiques ou des méthodes de calcul de basse fidélité. La diminution du coût de calcul des méthodes haute fidélité pour les écoulements instationnaires présente donc un intérêt industriel important.

Une autre problématique de la CFD réside dans la modélisation RANS. En effet, puisque les fluctuations turbulentes ne sont pas calculées, on peut s'interroger sur la capacité de ce modèle à capter certains phénomènes aérodynamiques complexes. Or, le coût de calcul prohibitif nécessaire pour les simulations ayant une résolution plus élevée (Large Eddy Simulation, Direct Numerical Simulation, etc.) ne permet pas une application à grande échelle.

1.3 Objectifs de recherche

Ce projet vise donc le développement d'une méthode capable de simuler les phénomènes instationnaires de façon efficace afin d'étendre l'utilisation de la CFD dans les processus de conception en aéronautique. Afin de juger de l'atteinte de cet objectif, la méthode proposée sera comparée à une méthode de référence, soit la méthode *Dual Time Stepping*. Deux sous-objectifs sont poursuivis :

- Implémenter une méthode moins coûteuse que la méthode *Dual Time Stepping* ;
- Vérifier les solutions de cette méthode avec les solutions de la méthode *Dual Time Stepping* pour les équations RANS.

1.4 Plan du mémoire

Ce mémoire est divisé en quatre chapitres : la revue de littérature, la description des algorithmes utilisés, les résultats numériques et les conclusions.

Pour débiter, une revue de la littérature sur la modélisation du tremblement transsonique est présentée. Ce phénomène est utilisé comme application finale de ce mémoire puisqu'il s'agit d'un phénomène complexe dont la simulation présente un intérêt industriel. Par la suite, la revue de littérature présente les travaux réalisés pour la modélisation des écoulements instationnaires avec des méthodes fréquentielles comme les méthodes *Harmonic Balance*,

Non-Linear Frequency Domain et Time Spectral.

Le chapitre 2 présente le solveur NSCODE de base, sur lequel reposent les développements présentés dans ce mémoire. Par la suite, l'implémentation de modèles de turbulence en vue du calcul du tremblement transsonique est décrite. Finalement, l'implémentation de la méthode *Time Spectral* est détaillée. Cette section présente des résultats de vérification pour chacune des implémentations.

Le chapitre 3 présente des résultats d'analyse utilisant la méthode *Time Spectral*. Le premier cas est l'analyse de la fréquence du lâcher tourbillonnaire d'un cylindre en régime laminaire. Ensuite, la simulation du décrochage dynamique du profil NACA0015 et l'oscillation d'un aileron sur une configuration basée sur le profil NACA0012 sont présentées. Finalement, le tremblement transsonique du profil OAT15A est étudié.

Le dernier chapitre de ce mémoire résume les résultats de ces travaux de maîtrise, discute des limitations des solutions proposées et propose des pistes de développement pour le solveur NSCODE.

CHAPITRE 2 REVUE DE LITTÉRATURE

Ce chapitre présente une revue de l'état des connaissances reliées aux développements et aux sujets traités dans ce mémoire. Premièrement, une revue de la simulation du tremblement transsonique (de l'anglais *transonic buffet*) est présentée afin de mettre en relief les méthodes de calcul employées pour la simulation de ce phénomène. Par la suite, les méthodes utilisées pour le calcul des équations d'Euler et de Navier-Stokes dans le domaine fréquentiel sont présentées.

2.1 Tremblement transsonique

Le tremblement transsonique résulte d'une interaction entre le choc transsonique et la couche limite d'une aile ou d'un profil qui entraîne une oscillation de la position du choc. La figure 2.1 illustre ce phénomène pour quatre instants du cycle de tremblement. On observe que le choc se déplace d'abord vers l'amont du profil avec l'apparition d'une large zone d'écoulement séparé. Par la suite, le choc se déplace vers l'aval et l'écoulement redevient attaché. Ce phénomène cause une variation des efforts aérodynamiques. Ainsi, le tremblement peut occasionner des vibrations et constitue une limite de l'enveloppe de vol des avions civils.

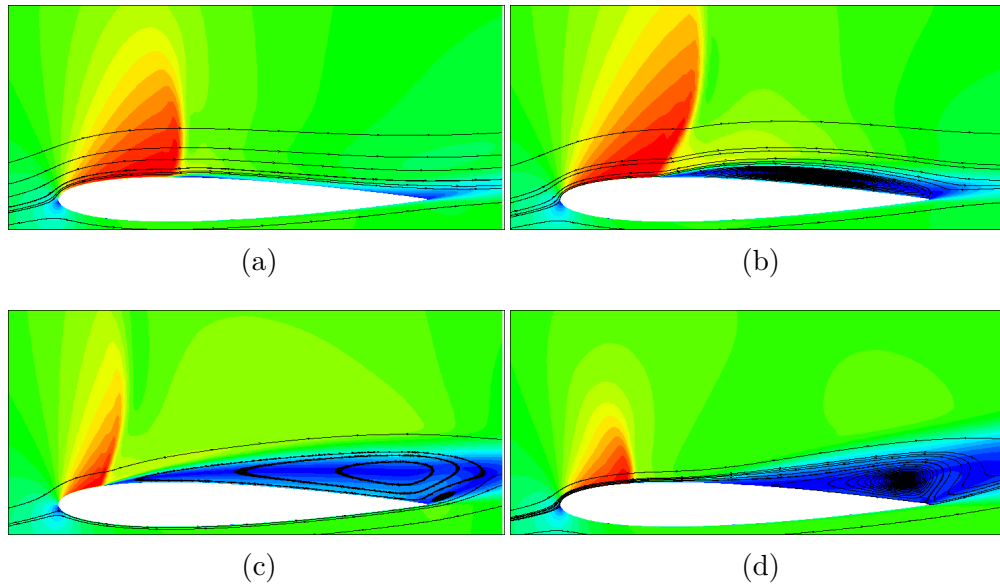


Figure 2.1 Contours de nombre de Mach et lignes de courant autour du profil NACA0012 en tremblement transsonique

2.1.1 Tremblement bidimensionnel

Le tremblement bidimensionnel a été étudié expérimentalement par Jacquin *et al.* (2009). Les résultats obtenus pour le profil OAT15A montrent une fréquence d'environ 70 Hz ($St = \frac{f_c}{U_\infty} = 0.06$). Grossi *et al.* (2014) obtiennent des résultats similaires à l'expérience tant avec des simulations RANS que DDES (*Delayed Detached Eddy Simulation*). Cependant, on observe que les prédictions dépendent du modèle de turbulence. Thiery et Coustols (2006) observent un effet similaire du modèle de turbulence et étudient l'effet de la modélisation des parois de la veine d'essai. Toujours pour le profil OAT15A, Deck (2005) compare des solutions de tremblement obtenues avec les modèles DES (*Detached Eddy Simulation*), ZDES (*Zonal Detached Eddy Simulation*) et URANS. Ils observent qu'une augmentation de l'angle d'attaque est nécessaire pour observer le phénomène de tremblement avec les calculs URANS. La méthode ZDES permet quant à elle de calculer le tremblement aux conditions de l'expérience. D'autre part, Iovnovich et Raveh (2012) calculent des fréquences similaires à l'expérience de McDevitt et Okuno (1985) pour le profil NACA0012 avec des calculs URANS. Dans cette publication, les conditions menant au tremblement transsonique pour trois profils aérodynamiques sont aussi étudiées. Ainsi, bien que le modèle numérique a un grand effet sur les conditions d'occurrence du tremblement, la fréquence de ce dernier est bien prédite par les calculs CFD, dont les calculs URANS.

2.1.2 Tremblement tridimensionnel

Le tremblement tridimensionnel a été étudié expérimentalement par Molton *et al.* (2013) et Dandois (2016) sur une configuration aile fuselage basée sur le profil OAT15A. Des fréquences largement plus élevées des fréquences du tremblement bidimensionnel sont observées, avec des nombres de Strouhal basés sur la corde de l'ordre de 0.2 à 0.6. Cette configuration est étudiée numériquement avec un modèle ZDES par Brunet et Deck (2008). Sartor et Timme (2015a,b) ont étudié l'écoulement transsonique sur une configuration représentative d'un avion commercial avec des simulations URANS et DDES. Ces résultats montrent que les simulations URANS capturent les caractéristiques principales de l'écoulement. Iovnovich et Raveh (2015) ont étudié l'apparition de cellules en envergure sur des configurations tridimensionnelles simplifiées avec des simulations URANS.

Ainsi, le modèle URANS permet de capturer les caractéristiques les plus importantes de l'écoulement et sera utilisé pour la simulation du tremblement transsonique dans ce mémoire. Cependant, une attention particulière doit être portée au modèle de turbulence utilisé.

2.2 Schéma de résolution dans le domaine fréquentiel

Les équations de Navier-Stokes instationnaires peuvent être résolues en utilisant plusieurs méthodes. Une première approche est de faire évoluer la solution en temps avec un schéma temporel explicite. Puisque les techniques d'accélération comme le multigrille (Jameson, 1986), les pas de temps locaux et le lissage des résidus (IRS, de l'anglais Implicit Residual Smoothing) (Jameson et Baker, 1983) rendent le schéma inconsistant en temps, ces techniques ne peuvent pas être utilisées. Cette méthode est donc bien adaptée pour les applications où l'échelle de temps du phénomène se compare bien à la limite de stabilité du schéma d'intégration en temps (Blazek, 2005). Néanmoins, pour les phénomènes où l'échelle de temps est largement plus grande que la limite de stabilité du schéma d'intégration, une méthode d'avancement en temps implicite est souhaitable. La méthode *Dual Time Stepping* (Jameson *et al.*, 1981) fait partie de celle-ci. Cette méthode résout le problème instationnaire comme une série de problèmes stationnaires. Ces derniers sont résolus avec les techniques d'accélération développées pour les équations stationnaires.

Pour la résolution de phénomènes périodiques, le temps de calcul peut être réduit de façon significative en transférant les équations dans le domaine fréquentiel, comme montré par McMullen (2003). Ce type de méthodes inclut des méthodes linéaires (Hall et Crawley, 1989; Clark et Hall, 2000) et non linéaires. Cette revue de littérature porte sur les méthodes non linéaires puisqu'elles sont mieux adaptées au phénomène instationnaire de grande amplitude (Hall *et al.*, 2013). On retrouve trois méthodes dans la littérature, soit les méthodes *Harmonic Balance* (HB), *Time Spectral* (TSM) et *Non-Linear Frequency Domain* (NLFD).

2.2.1 Discrétisation temporelle

Ning et He (1998) ont introduit une méthode non linéaire pour le calcul des équations d'Euler dans le domaine fréquentiel. Cette méthode est utilisée pour le calcul d'écoulement dans les turbomachines. Par la suite, Hall *et al.* (2002) ont développé la méthode *Harmonic Balance* (HB). Cette méthode suppose un écoulement périodique en temps, de telle sorte que les variables conservatives peuvent être exprimées sous la forme de série de Fourier où les coefficients de la série varient en espace. Ces séries sont utilisées pour transformer le problème instationnaire en un ensemble de problèmes stationnaires dans le domaine fréquentiel. Ces cas stationnaires sont répartis sur une période du phénomène et sont couplés ensemble par le terme de dérivée temporelle des équations de Navier-Stokes. De façon générale, les séries de Fourier sont tronquées à un nombre de N harmoniques de la fréquence dominante et $2N + 1$ instances de temps sont calculées. La figure 2.3 illustre ce principe de résolution. À chacune

des itérations du solveur, le signal complet d'une période est connu (figure 2.3 a)) et peut être transformé dans le domaine fréquentiel (figure 2.3 b)). À chacune des itérations du solveur, ce signal est modifié jusqu'à l'obtention d'un signal satisfaisant les équations de Navier-Stokes. Cette méthode est aussi appelée *High-Dimensional Harmonic Balance* (HDHB).

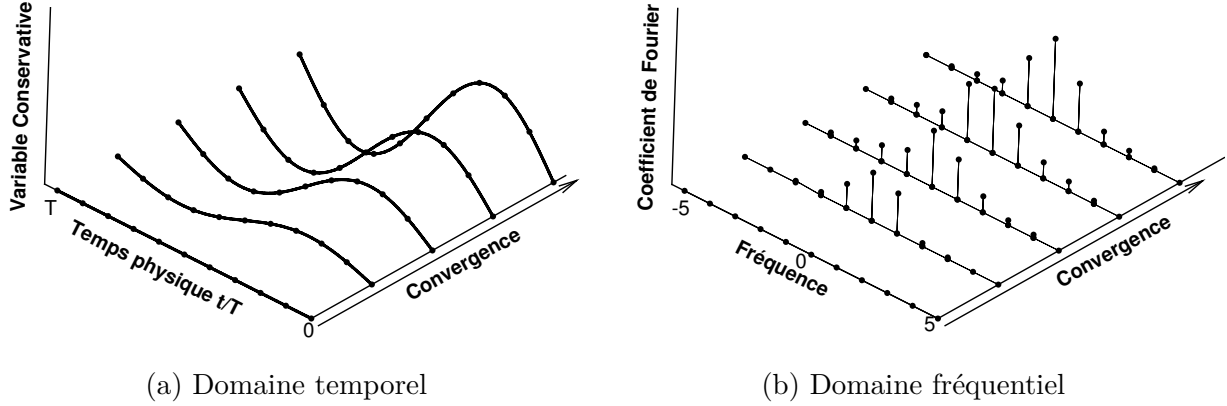


Figure 2.2 Principe de résolution dans le domaine fréquentiel

Hall *et al.* (2013) discutent des avancées réalisées avec ce type de méthode. Une analyse de stabilité présentée dans cet article montre que la stabilité de la méthode *Harmonic Balance* dépend à la fois du nombre de CFL et d'un paramètre lié à la fréquence appelé *grid reduced frequency*. Ce problème de stabilité a été étudié par Custer (2009) et Thomas *et al.* (2009), et résolu en ajoutant un préconditionneur. Pour résoudre ce problème, van der Weide *et al.* (2005) proposent de prendre en compte le nombre d'harmoniques et la fréquence dans la formulation du nombre de CFL.

Une approche équivalente à la méthode *Harmonique Balance* est la méthode *Time Spectral* de Gopinath et Jameson (2005). Cette approche combine la transformée de Fourier directe, la différentiation en temps et la transformée inverse en un seul opérateur équivalent à une multiplication matricielle. Cet opérateur est calculé analytiquement pour un nombre pair ou impair d'instances de temps. Cependant, van der Weide *et al.* (2005) montrent que la méthode *Time Spectral* peut être instable lorsqu'un nombre pair d'instances de temps est utilisé. Cette méthode est implémentée dans plusieurs solveurs CFD (Thomas *et al.*, 2013; Sicot *et al.*, 2008).

Contrairement à la méthode *Harmonic Balance*, la méthode *Non-Linear Frequency Domain* introduite par McMullen (2003) utilise un schéma d'intégration dans le domaine fréquentiel.

Les coefficients de la série de Fourier sont donc mis à jour plutôt que le signal dans le domaine temporel. Pour ce faire, les résidus et les variables conservatives sont supposés périodiques. Une particularité de l'implémentation de McMullen (2003) est l'utilisation d'un algorithme Fast Fourier Transform (FFT) qui permet d'effectuer plus rapidement les transformées de Fourier directe et inverse. Hall *et al.* (2013) montrent l'équivalence des méthodes HDHB, TSM et NLFD.

Ces méthodes s'appliquent aux écoulements ayant une seule fréquence dominante. Cependant, Ekici et Hall (2007) ont développé une méthode *Harmonic Balance* pour les phénomènes ayant plusieurs fréquences qui ne sont pas des harmoniques. Cette méthode permet de résoudre des écoulements quasi périodiques rencontrés dans les turbomachines (Ekici et Hall, 2008; Ekici *et al.*, 2010). Gopinath *et al.* (2007) utilisent une approche similaire afin de simuler l'écoulement multifréquentiel dans une turbine à plusieurs étages. Guédeney *et al.* (2013) discutent du conditionnement de l'opérateur en série de Fourier lorsque plusieurs fréquences sont considérées. Ce conditionnement peut rendre le schéma instable. Ils présentent aussi deux méthodes permettant de minimiser le conditionnement de l'opérateur calculant la dérivée en temps.

Mavriplis et Yang (2011) présentent une méthode hybride pour le calcul des écoulements quasi périodiques. Cette méthode est adaptée pour les écoulements fortement périodiques, mais présentant un comportement transitoire. La dérivée en temps est alors discrétisée avec la méthode TSM pour le comportement périodique et une différence finie arrière, est utilisée pour le comportement transitoire. Cette méthode peut être utilisée pour des cas comme des manoeuvres d'hélicoptères et des turbomachines en conditions transitoires (Mavriplis et Yang, 2011; Mavriplis *et al.*, 2012).

2.2.2 Schéma de résolution

Le système d'équations obtenu est le plus souvent résolu en ajoutant un terme de dérivée en pseudotemps, technique souvent employée pour résoudre les écoulements stationnaires. Cette approche permet l'utilisation des méthodes d'accélération développées pour les équations RANS. Un schéma explicite de Runge-Kutta est souvent employé pour intégrer la solution en pseudotemps. Cette approche permet d'intégrer les instances de temps séparément en ajoutant un terme source calculé avec la méthode TSM, HB ou NLFD.

Des schémas implicites peuvent aussi être employés. Cependant, leur implémentation s'avère plus complexe puisque le jacobien couple les instances de temps entre elles. La matrice jacobienne du système est donc plus coûteuse à inverser que pour les cas stationnaires et requiert un traitement particulier. Une première approche proposée par Sicot *et al.* (2008) est de négliger le jacobien de l'opérateur pseudo-spectral. La matrice jacobienne est alors bloc-diagonale et le système d'équations peut être résolu de la même façon que pour un cas stationnaire avec un schéma LU-SSOR. Cependant, cette approximation du jacobien peut limiter la stabilité du schéma.

Sicot *et al.* (2008), Mavriplis et Yang (2011), Mundis et Mavriplis (2013) et Mundis et Mavriplis (2014) proposent de déplacer les termes de couplages vers le membre de droite. La matrice jacobienne demeure bloc-diagonale, ce qui permet de traiter séparément les instances de temps lors de la résolution du système. Une méthode implicite développée pour les écoulements stationnaires est alors utilisée. Le membre de droite est mis à jour entre les cycles de relaxation pour prendre en compte la correction de la solution. Cependant, Mundis et Mavriplis (2013) rapportent des limitations à la stabilité de cette approche.

Weiss *et al.* (2011) proposent une factorisation approximative du jacobien en deux étapes. Dans un premier temps, seul le jacobien de la discrétisation en espace est considéré. La deuxième étape ajoute la contribution de l'opérateur pseudo-spectral. Un schéma similaire est employé par Thomas *et al.* (2013) et Leffell (2014). Dans leur cas, Woodgate et Badcock (2009) et Woodgate et Barakos (2012) proposent l'utilisation d'un schéma implicite avec une résolution par une méthode Krylov Subspace. D'autre part, Mundis et Mavriplis (2013, 2014) proposent un solveur GMRES. Cagnone et Nadarajah (2009) et Mosahebi et Nadarajah (2014) ont proposé des schémas implicites basés sur la méthode LU-SGS pour la formulation NLFD.

2.2.3 Repliement de spectre

Le repliement de spectre (en anglais *aliasing*) peut rendre les schémas pseudo-spectraux instables. Pour remédier à ce problème, Huang et Ekici (2014) introduisent un terme de dissipation artificielle (*Temporal Spectral Viscosity*, TSV). Ce terme de viscosité est appliqué aux modes les plus élevés de la discrétisation temporelle. McMullen (2003) utilise une méthode similaire sur les maillages grossiers lors des cycles multigrilles. Une autre approche est de considérer un nombre élevé de modes et de filtrer les modes les plus élevés. Cependant, cette approche requiert le calcul de solutions non utilisées, ce qui augmente la charge de calcul

et la mémoire requise. L'élimination du repliement de spectre est aussi discutée par Leffell (2014).

2.2.4 Phénomène de Gibbs

Un autre problème est le phénomène de Gibbs. Ce phénomène se produit lors de l'approximation d'une fonction discontinue par une série de Fourier. Il en résulte des oscillations autour de la discontinuité du signal. Leffell *et al.* (2013) observent ce phénomène lors de la résolution du modèle de turbulence de Spalart-Allmaras. La solution proposée par Leffell *et al.* (2013) pour le modèle de turbulence est d'annuler le terme source temporel lorsqu'il entraîne une viscosité turbulente négative. D'une façon similaire à la *Temporal Spectral Viscosity*, Djeddi et Ekici (2016) proposent d'appliquer une fonction de filtrage aux coefficients de la série de Fourier. Cette technique permet d'amortir les modes élevés et de réduire l'effet du phénomène de Gibbs.

2.2.5 Adaptation de la période

Une limitation des méthodes pseudo-spectrales est l'hypothèse d'un phénomène périodique de fréquence connue. Ces techniques s'appliquent donc difficilement aux phénomènes ayant une fréquence induite par l'écoulement, comme les lâchers tourbillonnaires. Afin de remédier à cette situation, McMullen (2003) propose la méthode *Gradient Based Variable Time Period* (GBVTP). Cette méthode utilise l'hypothèse que la solution ne peut converger qu'avec une période imposée égale à la fréquence du phénomène. Ce principe est illustré à la figure 2.3 de gauche qui schématise la variation du niveau de convergence selon la fréquence imposée. La résolution de la période se pose donc comme un problème d'optimisation visant à minimiser le résidu du système d'équations en adaptant la période. Une formulation de la dérivée du résidu par rapport à la période est développée et une méthode du gradient est employée pour optimiser la période. Cette technique est aussi utilisée par Gopinath et Jameson (2006) et Mosahebi et Nadarajah (2013).

Kielb *et al.* (2006) et Hall *et al.* (2013) proposent une méthode basée sur le déphasage de la solution. Celle-ci s'appuie sur l'observation qu'une période imposée inexacte provoque un déphasage de la solution entre les itérations du solveur. Ce déphasage, constant pour une fréquence donnée, varie linéairement autour de la fréquence exacte. Celle-ci peut donc être trouvée à partir d'un échantillon de fréquence en imposant la fréquence qui annule le déphasage. La figure 2.3 de droite illustre ce principe. Hall *et al.* (2013) remarquent que le gradient du résidu selon la période devient rapidement nul lorsque'une période différente de

la période exacte est imposée. Pour la même plage de fréquence, on observe une variation linéaire du déphasage. Cette constatation indique que la méthode basée sur le déphasage peut être plus robuste. Cette technique est aussi utilisée par Besem *et al.* (2016a) et Spiker *et al.* (2009).

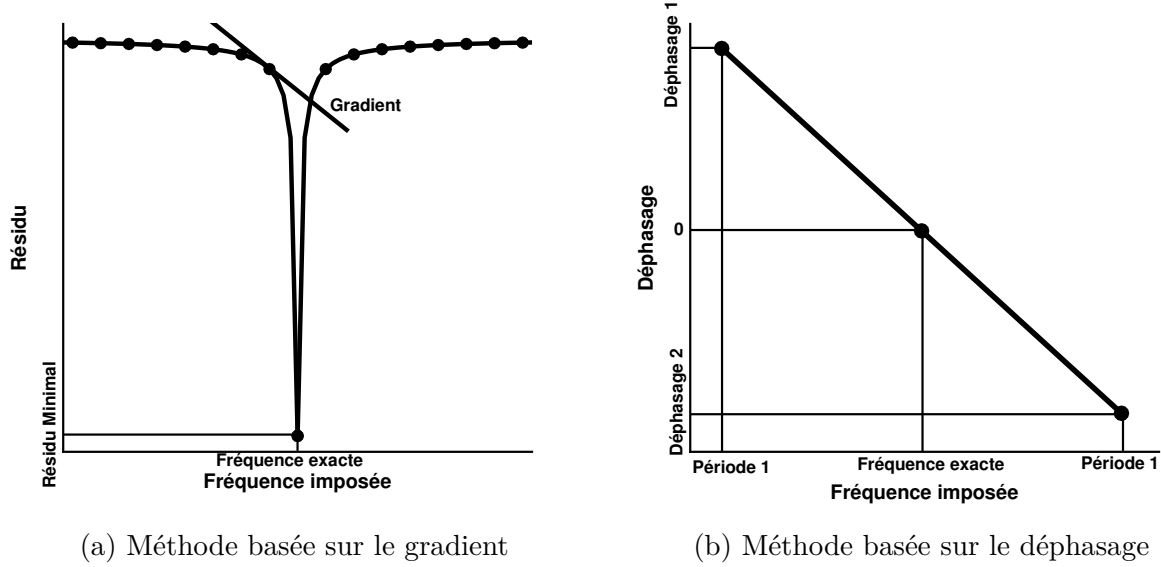


Figure 2.3 Méthode d'adaptation de la fréquence

2.2.6 Adaptation du nombre de modes

Maple *et al.* (2004) ont introduit le concept d'adaptation du nombre de modes pour la méthode *Harmonic Balance*. Mosahebi et Nadarajah (2013, 2014) ont développé la méthode *Adaptive Non-Linear Frequency Domain*. Cette dernière adapte le nombre de modes dans chacune des cellules selon un critère basé sur l'amplitude des modes. De cette façon, seuls les modes importants sont calculés dans chacune des cellules. Ainsi, les auteurs montrent qu'il est possible de conserver la précision du calcul et de réduire le coût de calcul. Néanmoins, cette méthode nécessite une reconstruction de la solution aux interfaces entre les cellules ayant un nombre de modes différent. En effet, les solutions de chaque cellule sont alors stockées à des instances de temps différentes ce qui ne permet pas d'évaluer les flux convectifs et visqueux directement. L'implémentation de cette méthode nécessite donc des modifications importantes à un code existant.

2.2.7 Modélisation de la turbulence

À la connaissance de l’auteur, la littérature traite peu de l’implémentation des modèles de turbulence dans les schémas basés sur une discrétisation en série de Fourier, bien que ces modèles sont couramment employés. Ainsi, McMullen (2003) utilise le modèle de Baldwin-Lomax. L’utilisation de ce modèle est directe puisque ce modèle algébrique n’inclut pas de terme de convection nécessitant l’évaluation de la dérivée temporelle. À l’inverse, le modèle à une équation de Spalart et Allmaras (1992) est une équation de transport. La dérivée temporelle de la variable conservée $\tilde{\nu}$ doit donc être évaluée. Leffell *et al.* (2013) proposent de résoudre le modèle de turbulence avec un schéma en deux temps. Premièrement, le terme temporel est traité explicitement. Dans un deuxième temps, le jacobien du terme de dérivée temporelle est considéré. Leffell *et al.* (2013) rapportent alors la présence du phénomène de Gibbs dû à une variation rapide de la valeur de la viscosité turbulente entre la valeur au champ lointain et celle du sillage. Ce modèle de turbulence est aussi employé par Sicot *et al.* (2008). D’autre part, Howison et Ekici (2015) présentent des résultats de décrochage dynamique avec le modèle de transition $\gamma - \bar{Re}_{\theta t}$ appliqué au modèle de turbulence Spalart-Allmaras (Medida, 2014).

2.2.8 Traitement de l’approche de maillage chimère

La méthode chimère permet d’obtenir le maillage d’une géométrie complexe, par exemple un profil avec dispositifs hypersustentateurs, en maillant séparément les différentes composantes de la géométrie. Les maillages sont ensuite assemblés en masquant les cellules incluses dans une géométrie (hors du domaine de calcul fluide) et en identifiant les cellules ayant une superposition avec un autre maillage. Les variables conservatives des cellules superposées sont interpolées depuis un autre maillage calculé. Les maillages chimères sont donc constitués de plusieurs maillages représentant chacun une seule géométrie. Cette méthode permet de réduire considérablement la complexité du maillage et de ne pas remailler lorsque la position relative des géométries est modifiée. La figure 2.4 illustre un maillage chimère et conventionnel pour le même profil. Pour la figure de gauche, les trois éléments de la géométrie sont maillés séparément et on observe la présence de zones d’intersections entre les maillages. On constate aussi que ces trois maillages sont plus simples que le maillage standard. Ce dernier comporte des cellules ayant un rapport d’aspect élevé et une propagation des zones de raffinement de maillage. L’approche chimère simplifie donc la génération de maillage.

Cette méthode peut être utilisée pour les calculs instationnaires. Cependant, dans le cas où les maillages ont un mouvement relatif, une cellule masquée à un temps donné peut devenir

calculée à un autre. Or, l'utilisation d'un opérateur pseudo-spectral nécessite un support temporel complet ce qui n'est pas le cas si une cellule calculée devient masquée en un point du cycle temporel. Cette problématique est illustrée à la figure 2.5 par le point rouge. Ce point est situé dans le maillage cartésien. Pour la configuration chimère de gauche, ce point est masqué à l'instant 1 et calculé aux instants 2 et 3. La configuration de droite ne présente pas ce problème puisque ce point est toujours inclus dans le maillage du profil et n'est donc pas utilisé dans le calcul. Soucy et Nadarajah (2009) proposent donc de construire le maillage de telle sorte qu'aucun point masqué ne devient calculé. Cette solution impose une contrainte qui limite l'utilisation d'une méthode fréquentielle. Mavriplis *et al.* (2012) proposent une méthode de reconstruction de la solution pour les cellules masquées. Dans son cas, Leffell *et al.* (2013) proposent d'utiliser une fonction d'interpolation sur les segments discontinus en temps, et l'opérateur pseudo-spectral sur les cellules ayant un historique temporel complet. Ces méthodes ont donc le potentiel d'être applicables à tous les maillages chimères.

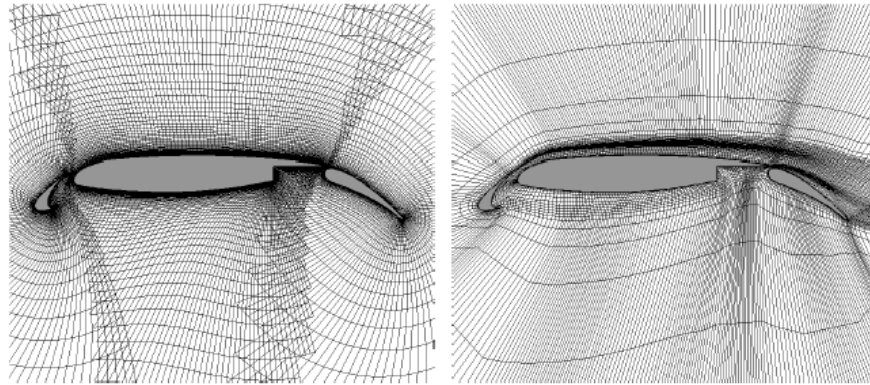


Figure 2.4 Maillage chimère (gauche) et conventionnel (droite) du profil McDonnell Douglas 30P30N avec dispositifs hypersustentateurs (extrait de Lévesque (2015))

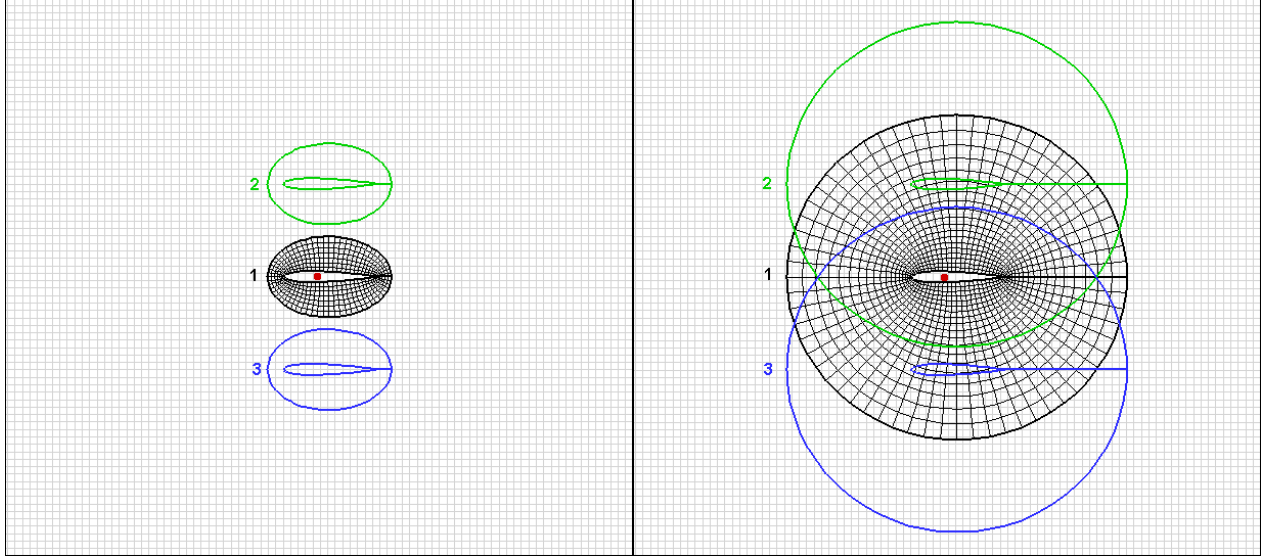


Figure 2.5 Configuration chimère avec (gauche) et sans (droite) cellules dynamiquement masquées/calculées

2.2.9 Utilisation des méthodes fréquentielles

En plus des cas présentés précédemment, la méthode *Harmonic Balance* a été employée pour calculer des cas de vibrations induites par vortex (VIV) (Spiker *et al.*, 2009; Besem *et al.*, 2016a,b). Ces études s'appuient sur l'hypothèse que, dans des conditions de VIV, le solveur *Harmonic Balance* ne convergera que si la fréquence du lâcher tourbillonnaire est synchronisée avec la fréquence d'une oscillation forcée de la structure. D'autre part, Hassan et Sicot (2011) et Da Ronch *et al.* (2013) utilisent ce type de schéma pour l'évaluation de dérivées dynamiques utilisables en dynamique du vol. Finalement, de nombreux auteurs ont couplé un solveur fluide de type *Harmonic Balance* avec un modèle structural (Besem *et al.*, 2016a; Mundis et Mavriplis, 2014) afin de calculer des cas d'aéroélasticité.

Cette revue de littérature fait ressortir plusieurs éléments qui seront considérés pour le développement d'un solveur dans le domaine fréquentiel. Premièrement, plusieurs approches peuvent être utilisées pour le calcul de la dérivée temporelle des équations de Navier-Stokes. L'approche *Time Spectral* est utilisée puisque les équations sont conservées dans le domaine temporel et le passage dans le domaine fréquentiel n'est utilisé que pour l'évaluation de la dérivée temporelle. Cette méthode requiert donc moins de modifications à un code existant. Deuxièmement, un schéma implicite peut être implémenté pour augmenter le taux de convergence du solveur. Ensuite, la littérature montre qu'une attention particulière doit être portée au repliement de spectre et au phénomène de Gibbs lors de l'utilisation d'un schéma

pseudo-spectral. De plus, pour simuler un phénomène autoentretenu comme le tremblement transsonique, une méthode d'adaptation de la période est nécessaire. Finalement, l'utilisation de modèles de turbulence est possible dans un solveur *Time Spectral*.

CHAPITRE 3 MÉTHODES NUMÉRIQUES

Ce chapitre présente les méthodes numériques du logiciel NSCODE. Dans un premier temps, les algorithmes présents dans le solveur NSCODE de base sont présentés. Ensuite, l'implémentation de variantes du modèle de turbulence de Spalart-Allmaras est décrite et validée. Ces modèles sont ajoutés dans le but de simuler le tremblement transsonique. Finalement, l'implémentation d'un schéma *Time Spectral* est présentée. Cette implémentation inclut un solveur implicite LU-SGS, deux méthodes de solution de la fréquence et la résolution des modèles de turbulence. Des cas tests sont présentés pour l'implémentation de chacun de ces éléments.

3.1 Solveur NSCODE

NSCODE est un logiciel de dynamique des fluides numérique développé à Polytechnique Montréal. Ce logiciel est un solveur volume fini centré aux cellules pour la résolution des équations (U)RANS bidimensionnelles. Les flux convectifs sont discrétisés avec un schéma centré additionné de dissipation artificielle scalaire (Jameson *et al.*, 1981) ou matricielle (Swanson et Turkel, 1997).

Une approche de maillage structuré multibloc est utilisée et la méthode chimère est implémentée afin de simplifier la génération de maillages pour les géométries complexes. Une approche ALE (*Arbitrary Lagrangian Eulerian*) est utilisée pour les simulations impliquant le mouvement de la géométrie. Les maillages sont déplacés sans déformation. C'est-à-dire que le volume des cellules Ω demeure constant pour les simulations présentées dans ce mémoire. L'implémentation de ce solveur et du préprocesseur chimère est détaillée par Lévesque (2015), Pigeon *et al.* (2014) et Pigeon (2014). Certains éléments essentiels pour ce mémoire sont décrits dans les prochaines sections.

3.1.1 Schéma de résolution

Les équations de Navier-Stokes sont résolues en ajoutant une dérivée en pseudotemps qui permet d'intégrer les équations en temps jusqu'à convergence.

$$\Omega \frac{\partial U}{\partial t^*} + \Omega \frac{\partial U}{\partial t} + R = 0 \quad (3.1)$$

Dans le cas d'un écoulement stationnaire le terme $\frac{\partial U}{\partial t}$ est nul, alors qu'il est discrétisé selon diverses méthodes pour les écoulements instationnaires. L'intégration en pseudotemps permet d'utiliser des techniques d'accélération, telles que le multigrille, le lissage des résidus et les pas de temps locaux.

Le solveur NSCODE utilise deux types de solveur pour l'intégration en pseudotemps. Un solveur explicite Runge-Kutta (RK) et un solveur implicite Lower-Upper Symmetric-Gauss-Seidel (LU-SGS) peuvent être utilisés.

Schéma de Runge-Kutta

Le schéma de Runge-Kutta modifié de Jameson (1985) est employé. Ce schéma à la particularité de ne pas nécessiter le stockage des solutions intermédiaires. Pour k_{max} étapes, ce schéma s'écrit :

$$\begin{aligned} U^0 &= U^n \\ U^{k+1} &= U^0 - \alpha_k \frac{\Delta t^*}{V} \hat{R}(U^k) \\ U^{n+1} &= U^{k_{max}} \end{aligned} \tag{3.2}$$

\hat{R} est composé des flux visqueux, convectifs et de la dissipation artificielle. Un traitement particulier est appliqué aux flux dissipatifs, de telle sorte que :

$$\hat{R}(U^k) = R^c(U^k) + R^v(U^k) + \beta_k R^d(U^k) + (1 - \beta_k) R^d(U^{k-1}) \tag{3.3}$$

Typiquement, un schéma à 5 étapes est utilisé dans NSCODE avec les coefficients :

$$\alpha_k = [1/4; 1/6; 3/8; 1/2; 1] \tag{3.4}$$

$$\beta_k = [1; 0; 0.56; 0; 0.44] \tag{3.5}$$

La méthode IRS (Jameson et Baker, 1983) est utilisée afin d'augmenter le pas de temps Δt^* acceptable.

$$\Delta t^* = \frac{\Omega CFL}{\left(\hat{\Lambda}_c^I + \hat{\Lambda}_c^J\right) + 4 \left(\hat{\Lambda}_v^I + \hat{\Lambda}_v^J\right)} \tag{3.6}$$

où $\hat{\Lambda}_c$ et $\hat{\Lambda}_v$ sont les rayons spectraux convectifs et visqueux dans les directions I et J . Un nombre de CFL de 5.5 est souvent employé avec NSCODE. Pour plus de détails, voir Blazek (2005).

Schéma LU-SGS

Le schéma de résolution LU-SGS (Jameson et Yoon, 1987; Yoon et Jameson, 1988; Cagnone *et al.*, 2011) repose sur une discrétisation temporelle implicite par la méthode d'Euler :

$$\left(\Omega \frac{I}{\Delta t^*} + \frac{\partial \bar{R}}{\partial U} \right) \Delta U^n = -R(U^n) \quad (3.7)$$

où $\Delta U^n = U^{n+1} - U^n$ et \bar{R} une approximation du résidu. La matrice jacobienne A est décomposée en trois matrices \mathcal{L} , \mathcal{U} et \mathcal{D} .

$$A \Delta U^n = (\mathcal{L} + \mathcal{D} + \mathcal{U}) \Delta U^n = -R(U^n) \quad (3.8)$$

Le système est alors résolu en deux balayages (forward et backward sweep).

$$(\mathcal{L} + \mathcal{D}) \Delta U^{s+1/2} = -R(U^n) - \mathcal{U} \Delta U^s \quad (3.9)$$

$$(\mathcal{U} + \mathcal{D}) \Delta U^{s+1} = -R(U^n) - \mathcal{L} \Delta U^{s+1/2} \quad (3.10)$$

Après s_{max} cycles, la solution est mise à jour : $U^{n+1} = U^n + \omega \Delta U^{s_{max}}$ où ω est un facteur de sous relaxation. L'implémentation du schéma LU-SGS dans NSCODE est détaillée par Lévesque (2015).

3.1.2 Discrétisation temporelle

Le solveur NSCODE emploie deux types de discrétisation de la dérivée temporelle $\frac{\partial U}{\partial t}$ de l'équation 3.1. L'historique temporel de l'écoulement peut être calculé avec la méthode *Dual Time Stepping*. À l'opposé, la méthode *Non-Linear Frequency Domain* est implémentée afin de résoudre le régime périodique dans le domaine fréquentiel. S'ajoutera à ces méthodes la méthode *Time Spectral* qui sera présentée en détail à la section 3.3. Celle-ci calcule le régime périodique dans le domaine temporel en employant une méthode fréquentielle.

Dual Time Stepping

Jameson (1991) a introduit la discrétisation *Dual Time Stepping* afin de régler les problèmes associés à l'intégration en temps de la solution par un schéma explicite, c'est-à-dire un pas de temps physique limité par la stabilité du schéma employé. En effet, des pas de temps physique beaucoup plus grand que ceux prescrits par le critère de CFL peuvent souvent être employés. Cette méthode utilise une différence finie arrière d'ordre deux afin d'approximer la dérivée en temps des équations de Navier-Stokes.

$$\Omega \frac{\partial U}{\partial t} = \frac{\Omega}{2\Delta t} (3U^{n+1} - 2U^n + U^{n-1}) \quad (3.11)$$

où Δt est le pas de temps physique. On peut alors définir un résidu modifié R^* .

$$R^*(U^{n+1}) = \frac{\Omega}{2\Delta t} (3U^{n+1} - 4U^n + U^{n-1}) + R(U^{n+1}) \quad (3.12)$$

L'équation 3.1 devient alors :

$$\frac{\partial U}{\partial t^*} + R^*(U) = 0 \quad (3.13)$$

Le pseudo-code 1 montre la procédure d'intégration en temps. La boucle s correspond au schéma d'intégration utilisé pour un schéma stationnaire et la boucle n au calcul des pas de temps. Afin de mieux contrôler la convergence des pas de temps, un critère d'arrêt sur le résidu peut être imposé au lieu d'un nombre fixe de sous-itérations nb_{subit} . Dans NSCODE, la norme L_2 du résidu de la densité à travers le domaine de calcul est utilisée pour monitorer la convergence. Celle-ci est normalisée par le résidu de la première itération du pas de temps. Le pas de temps est souvent exprimé en terme de pas de temps par période du phénomène (TSPP).

Pseudo-code 1 *Dual Time Stepping*

```

for  $n = 0$  to  $nb_{timestep}$  do
   $U_0^{n+1} = U_{nb_{subit}}^n$ 
  for  $s = 0$  to  $nb_{subit}$  do
     $R^*(U_s^{n+1}) = \oint_{\partial\Omega} (F_C - F_V) dS + \frac{\Omega}{2\Delta t} (3U_s^{n+1} - 4U_{nb_{subit}}^n + U_{nb_{subit}}^{n-1})$ 
    schéma d'intégration en pseudotemps  $\rightarrow U_{s+1}^{n+1}$ 

```

Cette méthode permet d'utiliser les mêmes techniques d'accélération que pour les écoulements stationnaires. Le système d'équations peut être résolu avec un schéma explicite ou un

schéma implicite. Dans le deuxième cas, le jacobien du terme temporel doit être considéré. C'est à dire :

$$\frac{1}{2\Delta t} \frac{\partial}{\partial U^{n+1}} (3U^{n+1} - 4U^n + U^{n-1}) = \frac{3}{2\Delta t} \quad (3.14)$$

Non-Linear Frequency Domain

La méthode *Non-Linear Frequency Domain* introduite par McMullen (2003) est implémentée dans NSCODE afin de discrétiser le terme de dérivée temporelle de l'écoulement avec une méthode fréquentielle. Les variables conservatives et les résidus sont exprimés par les séries de Fourier de l'équation 3.15. L'implémentation est illustrée à la figure 3.1. Pour cette méthode, les flux convectifs et visqueux $R(U)$ ainsi que les conditions limites sont évalués dans le domaine temporel. Le calcul de la dérivée temporelle et l'intégration en pseudotemps sont réalisés dans le domaine fréquentiel. Cette méthode permet d'employer les mêmes techniques d'accélération que pour les écoulements stationnaires. Cependant, la mise à jour de la solution dans le domaine fréquentiel occasionne des modifications importantes au solveur de base. L'implémentation de la méthode NLFD est décrite en détail par Lévesque (2015). Dans NSCODE, seul un schéma explicite Runge-Kutta est implémenté pour la méthode NLFD.

$$U(t) = \sum_{k=-m}^m \hat{U}_k e^{i\frac{2\pi k}{T}t} \quad R(t) = \sum_{k=-m}^m \hat{R}_k e^{i\frac{2\pi k}{T}t} \quad (3.15)$$

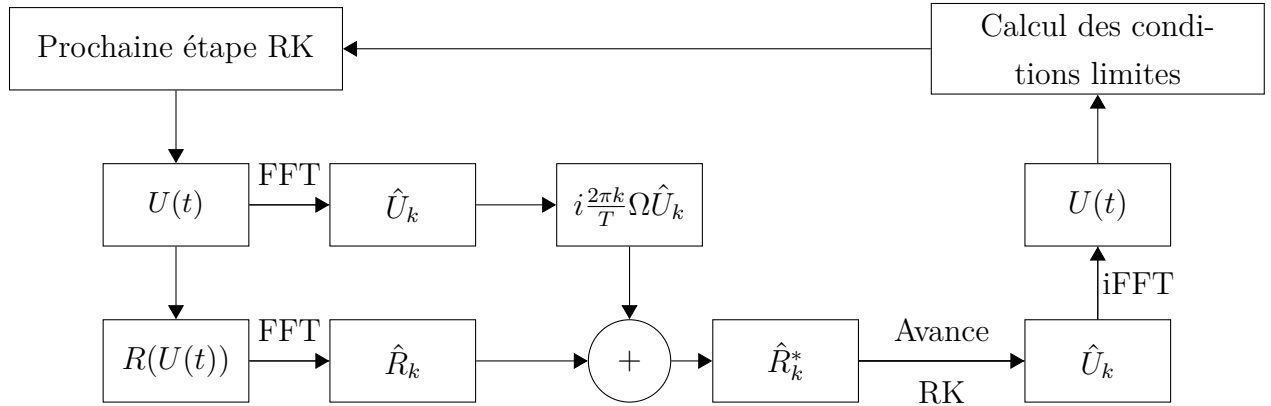


Figure 3.1 Implémentation du schéma NLFD dans un solveur Runge-Kutta

3.1.3 Modèles de turbulence

Plusieurs modèles de turbulence sont disponibles afin de fermer le système d'équations (U)RANS : Le modèle algébrique de Baldwin Lomax, le modèle à une équation de Spalart-Allmaras et celui à deux équations $k - \omega$ *SST* de Menter. Le modèle γ - $\tilde{R}e\theta_t$ peut être utilisé conjointement avec le modèle $k - \omega$ *SST* pour modéliser la transition laminaire turbulente.

Modèle de Spalart-Allmaras

Le modèle de turbulence à une équation de Spalart et Allmaras (1992) :

$$\nu_t = \tilde{\nu} f_{v1} \quad (3.16)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tilde{\nu}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} (\tilde{\nu} v_j) = c_{b1} [1 - f_{t2}] \tilde{S} \tilde{\nu} \\ + \frac{1}{\sigma} \left\{ \frac{\partial}{\partial x_j} \left[(\nu + \tilde{\nu}) \frac{\partial \tilde{\nu}}{\partial x_j} \right] + c_{b2} \frac{\partial \tilde{\nu}}{\partial x_j} \frac{\partial \tilde{\nu}}{\partial x_j} \right\} - \left[c_{w1} f_w - \frac{c_{b1}}{\kappa^2} f_{t2} \right] \left[\frac{\tilde{\nu}}{d} \right]^2 + f_{t1} \|\Delta v\|_2^2 \end{aligned} \quad (3.17)$$

$$f_{v1} = \frac{\chi^3}{\chi^3 + c_{v1}^3} \quad \chi \equiv \frac{\tilde{\nu}}{\nu} \quad (3.18)$$

$$\tilde{S} \equiv S + \frac{\tilde{\nu}}{\kappa^2 d^2} f_{v2} \quad f_{v2} = 1 - \frac{\chi}{1 + \chi f_{v1}} \quad (3.19)$$

$$f_w = p \left[\frac{1 + c_{w3}^6}{g^6 + c_{w3}^6} \right]^{1/6} \quad g = r + c_{w2}(r^6 - r) \quad r \equiv \frac{\tilde{\nu}}{\tilde{S} \kappa^2 d^2} \quad (3.20)$$

$$f_{t2} = c_{t3} e^{-c_{t4} \chi^2} \quad (3.21)$$

avec S la magnitude de la vorticité, d la distance à la paroi et les constantes.

$$\begin{array}{llll} c_{b1} = 0.1355 & \sigma = 2/3 & c_{b2} = 0.622 & \kappa = 0.41 \\ c_{w1} = c_{b1}/\kappa^2 + (1 + c_{b2})/\sigma & c_{w2} = 0.3 & c_{w3} = 2 & c_{v1} = 7.1 \\ c_{t1} = 1 & c_{t2} = 2 & c_{t3} = 1.1 & c_{t4} = 2 \end{array}$$

est implémenté dans le solveur NSCODE. Le solveur ségrégé différence finie ADI présenté par Spalart et Allmaras (1992) est utilisé. L'implémentation de ce solveur dans NSCODE est décrite par Mosahebi et Laurendeau (2015a). Sauf indication contraire, les cas sont exécutés

avec $\tilde{\nu}_\infty/\nu_\infty = 1 \times 10^{-6}$ soit une valeur pratiquement nulle de la viscosité turbulente à l'infini. Les valeurs recommandées (Rumsey, 2016) se situent plutôt dans l'intervalle $3 < \tilde{\nu}_\infty/\nu_\infty < 5$. Dans le solveur NSCODE, les termes f_{t1} et f_{t2} servant à modéliser la transition laminaire turbulente sont négligés.

Modèle Menter $k - \omega$ SST et $k - \omega$ SST γ - $\tilde{Re}\theta_t$

Le modèle de turbulence Menter $k - \omega$ SST (Menter, 1994) est implémenté dans NSCODE. Le modèle de transition γ - $\tilde{Re}\theta_t$ (Menter *et al.*, 2006) pour le modèle de turbulence $k - \omega$ SST permet la modélisation de la transition laminaire turbulente. L'implémentation de ces deux modèles dans NSCODE a fait l'objet de deux publications (Mosahebi et Laurendeau, 2015a,b).

3.2 Implémentation de modèles de turbulence

Grossi *et al.* (2014) montrent que, pour le solveur URANS NSMB (Vos *et al.*, 1998), l'utilisation de la correction de compressibilité (Spalart, 2000) et de la modification de Edwards-Chandra (Edwards et Chandra, 1996) a un effet important sur la modélisation du tremblement transsonique. Ces variantes du modèle de turbulence de Spalart-Allmaras sont donc ajoutées dans le but de modéliser le tremblement transsonique.

3.2.1 Modification d'Edwards-Chandra

Pour le modèle d'Edwards-Chandra, les termes f_{t1} et f_{t2} utilisés pour la transition laminaire turbulente sont négligés. Le terme \tilde{S} , inclus dans le terme de production du modèle, est modifié.

$$\tilde{S} = \bar{S} \left[\frac{1}{\chi} + f_{v1} \right] \quad \bar{S} = \left[\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \frac{\partial u_i}{\partial x_j} - \frac{2}{3} \left(\frac{\partial u_k}{\partial x_k} \right)^2 \right]^{1/2} \quad (3.22)$$

Le terme de destruction est aussi modifié de telle sorte que le terme r devient :

$$r = \frac{\tanh(\tilde{\nu}/\tilde{S}\kappa^2 d^2)}{\tanh(1.0)} \quad (3.23)$$

3.2.2 Correction de compressibilité

Dans le cas de la correction de compressibilité de Secundov (Shur *et al.*, 1995; Spalart, 2000), un terme supplémentaire est ajouté au modèle de turbulence.

$$CC = -c_5 \frac{\tilde{\nu}^2}{c^2} \frac{u_i}{x_j} \frac{u_i}{x_j} \quad c_5 = 3.5 \quad (3.24)$$

Le modèle devient alors :

$$\frac{\partial \tilde{\nu}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} (\tilde{\nu}_j v_j) = c_{b1} \tilde{S} \tilde{\nu} + \frac{1}{\sigma} \left\{ \frac{\partial}{\partial x_j} \left[(\nu + \tilde{\nu}) \frac{\partial \tilde{\nu}}{\partial x_j} \right] + c_{b2} \frac{\partial \tilde{\nu}}{\partial x_j} \frac{\partial \tilde{\nu}}{\partial x_j} \right\} - c_{w1} f_w \left[\frac{\tilde{\nu}}{d} \right]^2 + CC \quad (3.25)$$

Cas test : Profil OAT15A stationnaire

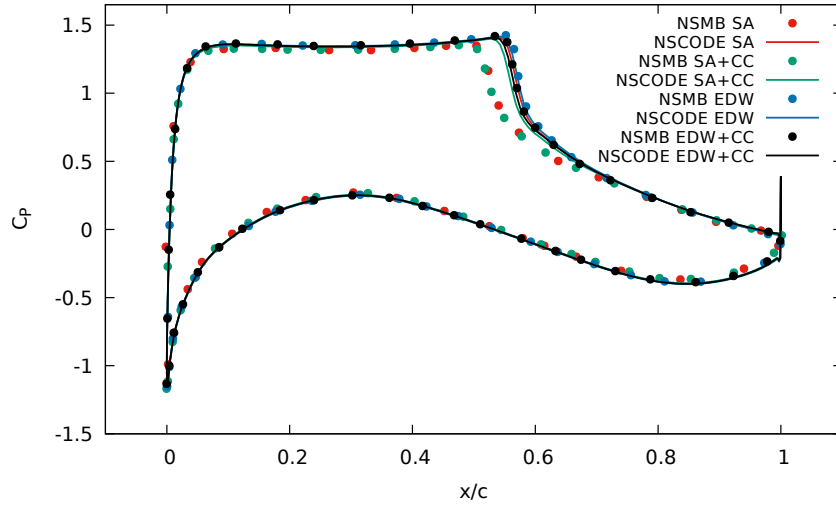
Les solutions du solveur NSCODE sont comparées aux résultats du solveur NSMB (Grossi *et al.*, 2014) afin de vérifier l'implémentation de la correction de compressibilité (CC) et de la modification de Edwards-Chandra (EDW). Le cas test est le profil OAT15A à Mach 0.73, un nombre de Reynolds de 3 millions et un angle d'attaque de 2.5°, soit une condition d'écoulement stationnaire.

La figure 3.2(a) montre les coefficients de pression obtenus pour les 4 modèles de turbulence, soit Spalart-Allmaras (SA) et Edwards-Chandra (EDW) avec et sans la correction de compressibilité (CC). On observe que les coefficients de pression obtenus avec le solveur NSCODE, montrés par des lignes, sont pratiquement identiques à ceux de NSMB avec les modèles EDW et EDW+CC, soit les points noirs et bleus. Cependant, un écart important est présent entre les solutions obtenues par les deux solveurs avec les modèles SA (rouge) et SA+CC (vert). Dans le cas de NSMB, la position du choc est nettement plus en amont que pour les solutions avec les modèles EDW. Pour NSCODE, la position du choc n'est que légèrement en amont.

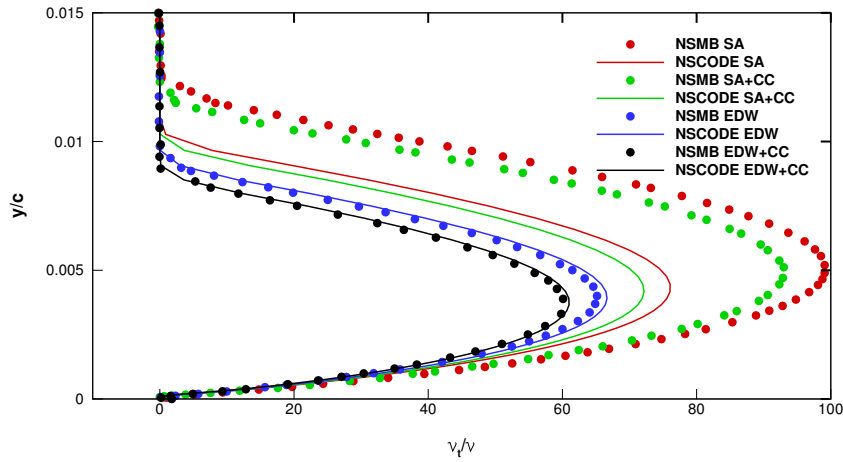
La figure 3.2(b) montre les profils de ratio de viscosité turbulente à la demi-corde. Les solutions du solveur NSCODE sont montrées en trait plein et celles du solveur NSMB par des points. On observe que les modèles EDW et EDW+CC (bleu et noir) ont des solutions pratiquement identiques à celles de NSMB. Cependant, un écart important est présent entre les ratios de viscosité turbulente des deux solveurs pour les deux modèles SA. Dans le cas de NSCODE, ces ratios sont légèrement plus élevés que pour les modèles EDW. Cet écart est

assumé à une différence dans la formulation du modèle de Spalart-Allmaras et explique les différences observées pour les coefficients de pression entre le solveur NSMB et NSCODE.

Dans tous les cas, la correction de compressibilité (vert et noir) diminue la magnitude de la viscosité turbulente. Ces résultats vérifient l'implémentation de la modification d'Edwards-Chandra et de la correction de compressibilité puisque les solutions obtenues avec ces modèles concordent avec les solutions du solveur NSMB.



(a) Coefficients de pression



(b) Profil de $\frac{\tilde{v}}{v}$ à la demi-corde

Figure 3.2 Vérification de l'implémentation de la modification d'Edwards-Chandra et de la correction de compressibilité du modèle de Spalart-Allmaras

3.3 Méthode *Time Spectral*

Les prochaines sous-sections présentent les différents points de l'implémentation de la méthode *Time Spectral*. La première sous-section présente la discrétisation temporelle avec le schéma *Time Spectral*. Ensuite, l'implémentation de deux schémas d'intégration en pseudo-temps (Runge-Kutta et LU-SGS) est décrite. Deux méthodes de résolution de la fréquence sont présentées. Cette section se termine avec l'implémentation des modèles de turbulence.

Des cas tests accompagnent chacune des sous-sections. Dans la plupart des cas, les résultats des méthodes *Dual Time Stepping* et *Time Spectral* sont comparés. Pour certains cas, la méthode NLFD est comparée à la méthode TSM afin de montrer leur équivalence. Pour la mesure de la convergence des schémas TSM et NLFD, la norme L_2 des résidus de la densité à travers toutes les instances de temps et tout le domaine de calcul est utilisée. Ce résidu est normalisé par rapport au résidu de la première itération. Pour les schémas NLFD et TSM, les solutions sont reconstruites à partir des séries de Fourier. Les instances de temps utilisées dans le calcul sont montrées par des points afin d'illustrer la résolution temporelle obtenue à partir d'un faible nombre d'instances de temps.

3.3.1 Discrétisation temporelle

Suivant une approche répandue dans la littérature, la méthode *Time Spectral* est implémentée avec un opérateur matriciel. Cet opérateur couple $2N + 1$ instances de temps et est déduit des transformées de Fourier discrètes directe et inverse (ici N est le nombre de modes conservés dans la série de Fourier). Cette implémentation sépare la période T en $2N + 1$ pas de temps de longueur égale. De telle sorte que :

$$t_n = \frac{n-1}{2N+1}T = \frac{n-1}{(2N+1)} \frac{2\pi}{\omega} \quad \text{pour } n=1, 2, \dots, 2N+1 \quad (3.26)$$

Les transformées de Fourier directe et inverse s'écrivent :

$$\hat{U} = EU \quad (3.27)$$

$$U = E^{-1}\hat{U} \quad (3.28)$$

avec :

$$E = \frac{2}{2N+1} \begin{bmatrix} 0.5 & 0.5 & 0.5 & \dots & 0.5 \\ \cos(\omega t_1) & \cos(\omega t_2) & \cos(\omega t_3) & \dots & \cos(\omega t_{2N+1}) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \cos(N\omega t_1) & \cos(N\omega t_2) & \cos(N\omega t_3) & \dots & \cos(N\omega t_{2N+1}) \\ \sin(\omega t_1) & \sin(\omega t_2) & \sin(\omega t_3) & \dots & \sin(\omega t_{2N+1}) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sin(N\omega t_1) & \sin(N\omega t_2) & \sin(N\omega t_3) & \dots & \sin(N\omega t_{2N+1}) \end{bmatrix} \quad (3.29)$$

$$E^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & \cos(\omega t_1) & \dots & \cos(N\omega t_1) & \sin(\omega t_1) & \dots & \sin(N\omega t_1) \\ 1 & \cos(\omega t_2) & \dots & \cos(N\omega t_2) & \sin(\omega t_2) & \dots & \sin(N\omega t_2) \\ 1 & \cos(\omega t_3) & \dots & \cos(N\omega t_3) & \sin(\omega t_3) & \dots & \sin(N\omega t_3) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \cos(\omega t_{2N+1}) & \dots & \cos(N\omega t_{2N+1}) & \sin(\omega t_{2N+1}) & \dots & \sin(N\omega t_{2N+1}) \end{bmatrix} \quad (3.30)$$

U est ici un vecteur contenant les variables conservatives aux $2N+1$ instances de temps. Le système d'équations pour l'instance de temps n s'exprime alors ($U_n = [\rho_n, \rho_n u_n, \rho_n v_n, \rho_n E_n]^t$) :

$$\Omega \frac{\partial U_n}{\partial t_n} + R(U_n) = \Omega \left(\frac{\partial E^{-1}}{\partial t} EU \right)_n + R(U_n) = \Omega \omega (DU)_n + R(U_n) = 0 \quad (3.31)$$

avec le terme $\frac{\partial E^{-1}}{\partial t} EU$ couplant les $2N+1$ instances de temps.

L'ajout des fonctions de filtrage proposées par Djeddi et Ekici (2016) pour diminuer l'effet du phénomène de Gibbs se fait en modifiant la matrice E^{-1} :

$$E_F^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & F_1 \cos(\omega t_1) & \dots & F_N \cos(N\omega t_1) & F_1 \sin(\omega t_1) & \dots & F_N \sin(N\omega t_1) \\ 1 & F_1 \cos(\omega t_2) & \dots & F_N \cos(N\omega t_2) & F_1 \sin(\omega t_2) & \dots & F_N \sin(N\omega t_2) \\ 1 & F_1 \cos(\omega t_3) & \dots & F_N \cos(N\omega t_3) & F_1 \sin(\omega t_3) & \dots & F_N \sin(N\omega t_3) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & F_1 \cos(\omega t_{2N+1}) & \dots & F_N \cos(N\omega t_{2N+1}) & F_1 \sin(\omega t_{2N+1}) & \dots & F_N \sin(N\omega t_{2N+1}) \end{bmatrix} \quad (3.32)$$

avec :

$$F(\chi_i) = \left(\frac{\sin(\pi \chi_i)}{\pi \chi_i} \right)^m \quad (3.33)$$

$$\chi_i = \frac{\rho_i}{N+1} \quad \text{pour } i=1, \dots, N \quad (3.34)$$

$$\rho_i = \begin{cases} 0 & i < C_H \\ i & C_H \leq i \leq N_H \end{cases} \quad (3.35)$$

où C_H est l'harmonique de coupure à partir de laquelle le filtrage est appliqué et m un paramètre contrôlant le filtrage. On considère alors le système d'équations :

$$\Omega \left(\frac{\partial E_F^{-1}}{\partial t} E U \right)_n + R(U_n) = \Omega \omega (D_F U)_n + R(U_n) = 0 \quad (3.36)$$

Finalement, le terme de Temporal Spectral Viscosity de Huang et Ekici (2014) est ajouté. Celui-ci est utilisé au besoin afin d'éliminer le phénomène de repliement de spectre (*aliasing*). Avec l'ajout de ce terme, le système d'équations devient :

$$\Omega \omega (D_F U)_n + R(U_n) - \Omega \omega^2 (D_2 U)_n = 0 \quad (3.37)$$

avec :

$$\omega^2 D_2 = \epsilon_N \frac{\partial^2 E^{-1}}{\partial t^2} E_{\text{cut-off}} \quad (3.38)$$

$$E_{\text{cut-off}} = \frac{2}{2N+1} \begin{bmatrix} \frac{\rho_0}{2} & \frac{\rho_0}{2} & \frac{\rho_0}{2} & \dots & \frac{\rho_0}{2} \\ \rho_1 \cos(\omega t_1) & \rho_1 \cos(\omega t_2) & \rho_1 \cos(\omega t_3) & \dots & \rho_1 \cos(\omega t_{2N+1}) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \rho_N \cos(N\omega t_1) & \rho_N \cos(N\omega t_2) & \rho_N \cos(N\omega t_3) & \dots & \rho_N \cos(N\omega t_{2N+1}) \\ \rho_1 \sin(\omega t_1) & \rho_1 \sin(\omega t_2) & \rho_1 \sin(\omega t_3) & \dots & \rho_1 \sin(\omega t_{2N+1}) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \rho_N \sin(N\omega t_1) & \rho_N \sin(N\omega t_2) & \rho_N \sin(N\omega t_3) & \dots & \rho_N \sin(N\omega t_{2N+1}) \end{bmatrix} \quad (3.39)$$

avec :

$$\rho_i = \begin{cases} 0 & i \leq m \\ 1 & i > m \end{cases} \quad (3.40)$$

où ϵ_N est un coefficient de viscosité et m l'harmonique de coupure. Afin de simplifier l'écriture, on considérera le résidu modifié :

$$R^*(U_n) = \Omega\omega(D_F U)_n + R(U_n) - \Omega\omega^2(D_2 U)_n = \Omega([\omega D_F - \omega^2 D_2] U)_n + R(U_n) \quad (3.41)$$

Dans la plupart des cas, seul l'opérateur D (sans fonction de filtrage) est employé.

3.3.2 Schéma de résolution Runge-Kutta

Tout comme pour le système d'équations stationnaire, un schéma en pseudotemps est utilisé.

$$\frac{\partial U_n}{\partial t^*} + R^*(U_n) = 0 \quad (3.42)$$

Le solveur explicite Runge-Kutta à cinq sous-intervalles (section 3.1.1) est employé. Aucune modification majeure par rapport au solveur stationnaire initial n'est requise. En effet, à l'inverse de la méthode NLFD où la solution est mise à jour dans le domaine fréquentiel, la méthode TSM demeure dans le domaine temporel. Ainsi, la seule modification au solveur Runge-Kutta est l'ajout du terme source temporel et la mise à jour de $2N + 1$ solutions plutôt qu'une seule. Les flux visqueux et convectifs sont discrétisés avec les mêmes schémas que pour les solutions stationnaires, sur les $2N + 1$ instances de temps. Le schéma 3.3 montre l'implémentation du schéma TSM.

Finalement, comme proposé par van der Weide *et al.* (2005), le pseudo pas de temps Δt^* est modifié pour maintenir la stabilité du schéma. On obtient alors :

$$\Delta t_n^* = \frac{CFL}{\|\lambda\| + \frac{(N-1)\pi}{T}\Omega} \quad (3.43)$$

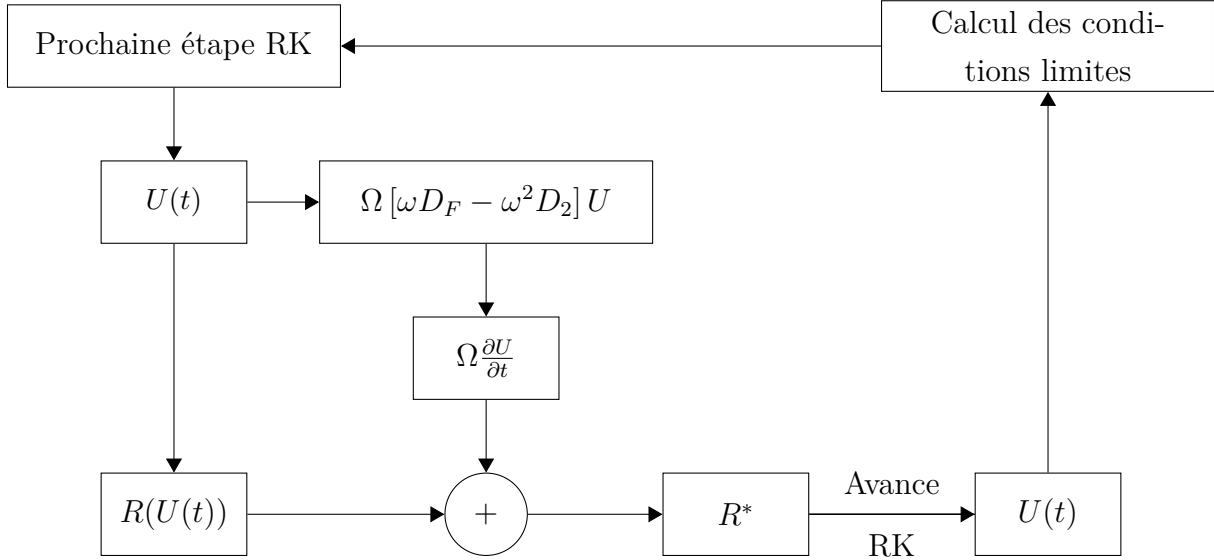


Figure 3.3 Implémentation du schéma TSM dans un solveur Runge-Kutta

Cas Test : NACA0012 Euler en tangage à la fréquence dominante et le 7^e harmonique

Pour vérifier l'implémentation *Time Spectral*, un cas test étudié par Mundis et Mavriplis (2013) est considéré. Il s'agit d'un profil NACA0012 à un nombre de Mach de 0.5 oscillant selon l'équation 3.44 avec $\omega = 2U_\infty k_c / c$ et $k_c = 0.02$. Ce profil oscille donc à deux fréquences simultanément, la fréquence dominante et la 7^e harmonique.

$$\theta(t) = 0.0^\circ + 2.5^\circ \sin(\omega t) + 1.0^\circ \sin(7\omega t) \quad (3.44)$$

La figure 3.4 montre la convergence modale des coefficients de portance et de moment. On observe que le coefficient de portance, montré à la sous-figure (a), ne varie pas selon le nombre de modes. D'ailleurs, un nombre minimal de 7 modes est utilisé puisque le profil est excité à la 7^e harmonique. Il serait donc impossible de bien modéliser l'écoulement avec un nombre inférieur de modes dans la discrétisation en série de Fourier.

La figure 3.4(b) indique qu'un nombre de modes entre 7 et 14 permet d'obtenir une solution convergée pour le coefficient de moment puisque la solution 14 modes est identique à celle 28

modes. Aussi, les solutions NLFD 7 modes et TSM 7 modes sont identiques, ce qui montre l'équivalence des deux approches.

Une étude similaire est présentée à la figure 3.5 pour la méthode *Dual Time Stepping* avec une convergence en pas de temps. On observe à la figure 3.5(b) que les solutions avec 49 et 98 pas de temps par période (TSPP) ont une amplitude d'oscillation du coefficient de moment trop élevée. Un nombre de pas de temps par période entre 196 et 392 est donc requis pour obtenir une solution indépendante du pas de temps.

La figure 3.6 montre les solutions convergées pour la méthode *Dual Time Stepping* et la méthode *Time Spectral* pour les coefficients de portance et de moment. La méthode TSM reproduit bien la solution DTS, tant pour le coefficient de portance que pour celui de moment. D'autre part, la figure 3.6(a) montre que les coefficients de portance concordent avec ceux obtenus par Mundis et Mavriplis (2013). Cependant, un écart est présent pour les coefficients de moment, ce qui pourrait être dû à une différence de maillage.

La figure 3.7 montre la convergence pour les schémas TSM en noir et NLFD en vert, ainsi que la convergence du cas stationnaire à l'angle d'attaque moyen de l'oscillation en rouge. On observe un taux de convergence similaire à celui de la simulation stationnaire pour les simulations TSM et NLFD. Ce résultat indique que le coût de calcul des deux méthodes fréquentielles doit être environ $2N + 1$ fois plus élevé que le coût de la simulation stationnaire. Un coût supplémentaire dû aux transformées de Fourier est aussi à prendre en compte. Le coût de calcul des méthodes fréquentielles est maintenant étudié.

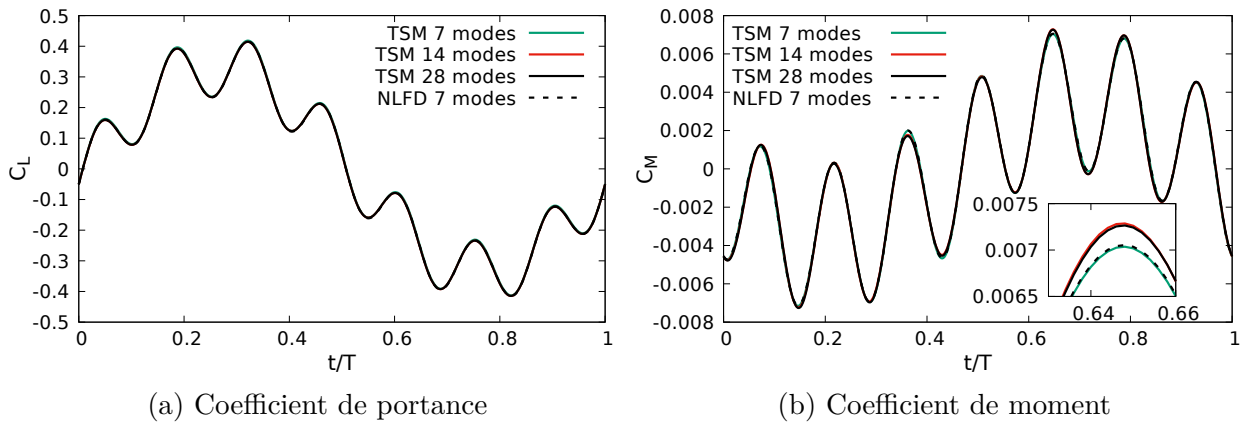


Figure 3.4 Coefficients aérodynamiques calculés avec la méthode *Time Spectral* pour le cas du profil NACA0012 oscillant à deux fréquences

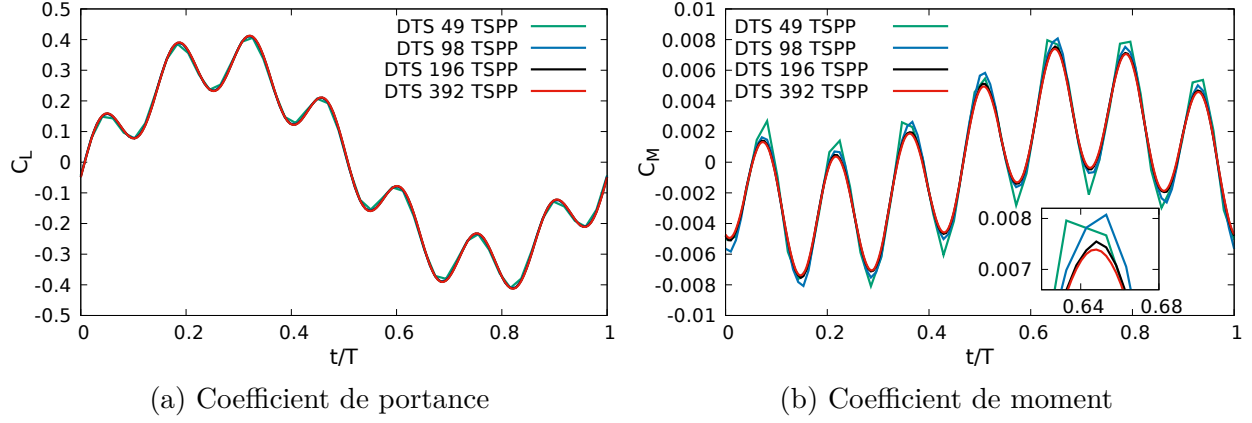


Figure 3.5 Coefficients aérodynamiques calculés avec la méthode *Dual Time Stepping* pour le cas du profil NACA0012 oscillant à deux fréquences

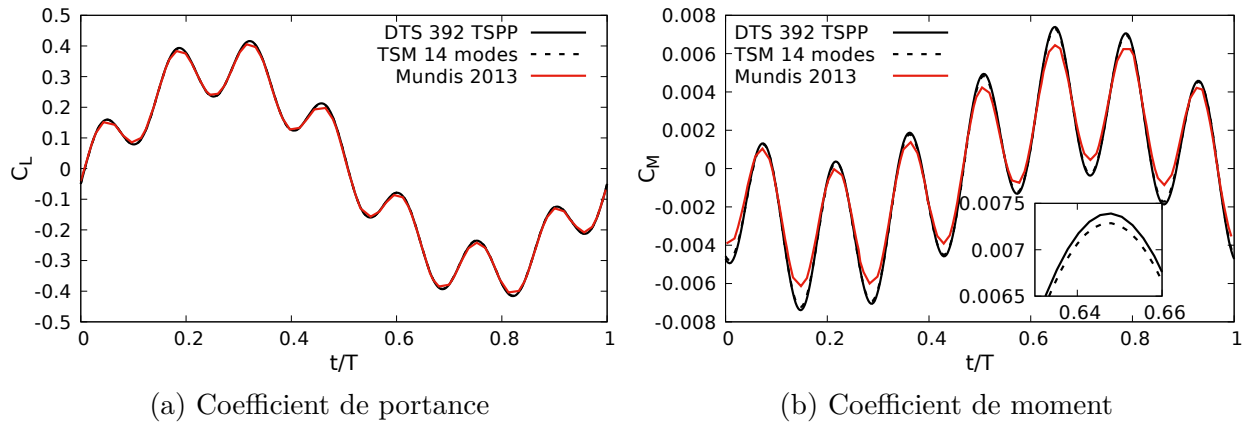


Figure 3.6 Comparaison des coefficients aérodynamiques avec les schémas DTS et TSM pour le cas du profil NACA0012 oscillant à deux fréquences

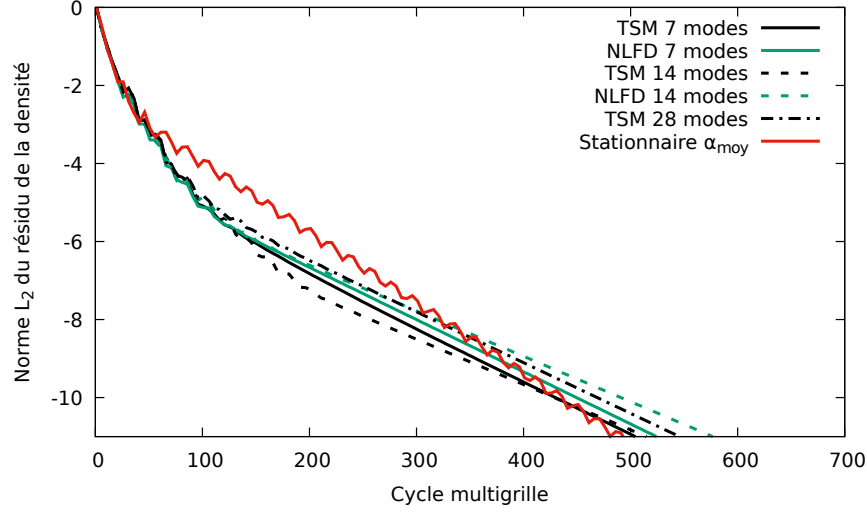


Figure 3.7 Convergence itérative pour le cas du profil NACA0012 oscillant à deux fréquences

Le tableau 3.1 et la figure 3.9 illustrent les temps de calcul CPU pour la méthode NLFD et la méthode TSM par rapport au temps de calcul d'un cas stationnaire. Le cas stationnaire est calculé sur le même maillage. Ainsi, l'efficacité des schémas NLFD et TSM peut être caractérisée par l'écart entre le coût de calcul total et $2N + 1$ fois le temps de calcul stationnaire. Cet écart est exprimé en pourcentage au tableau 3.1 et le ratio entre le temps de calcul total et le temps de calcul du cas stationnaire est tracé à la figure 3.9. On observe que le temps de calcul des deux méthodes devient égal pour un nombre de modes autour de 15. La méthode TSM (vert), est donc plus rapide que la méthode NLFD (rouge) pour les faibles nombres de modes. Il est à noter que, théoriquement, le temps de calcul de la série de Fourier avec une FFT est proportionnel à $N \log N$ alors que le calcul de la transformée de Fourier discrète est de N^2 . Il est donc attendu que la méthode NLFD devienne plus efficace avec un nombre élevé de mode.

Afin de diminuer le temps de calcul, on peut calculer la dérivée en temps dans une approche TSM avec une FFT. Cette approche est décrite au schéma 3.8. Contrairement à la méthode NLFD, les résidus sont conservés dans le domaine temporel ce qui réduit le nombre de FFT nécessaire. En effet, une FFT et une iFFT sont employées alors que la méthode NLFD (voir le schéma 3.1) utilise 2 FFT et une iFFT. On obtient alors un temps de calcul inférieur pour les nombres de modes supérieurs à un, comme le montre la courbe bleue de la figure 3.9. Cette méthode est équivalente à la méthode TSM de base (sans le terme *Temporal Spectral Viscosity* et les fonctions de filtrage).

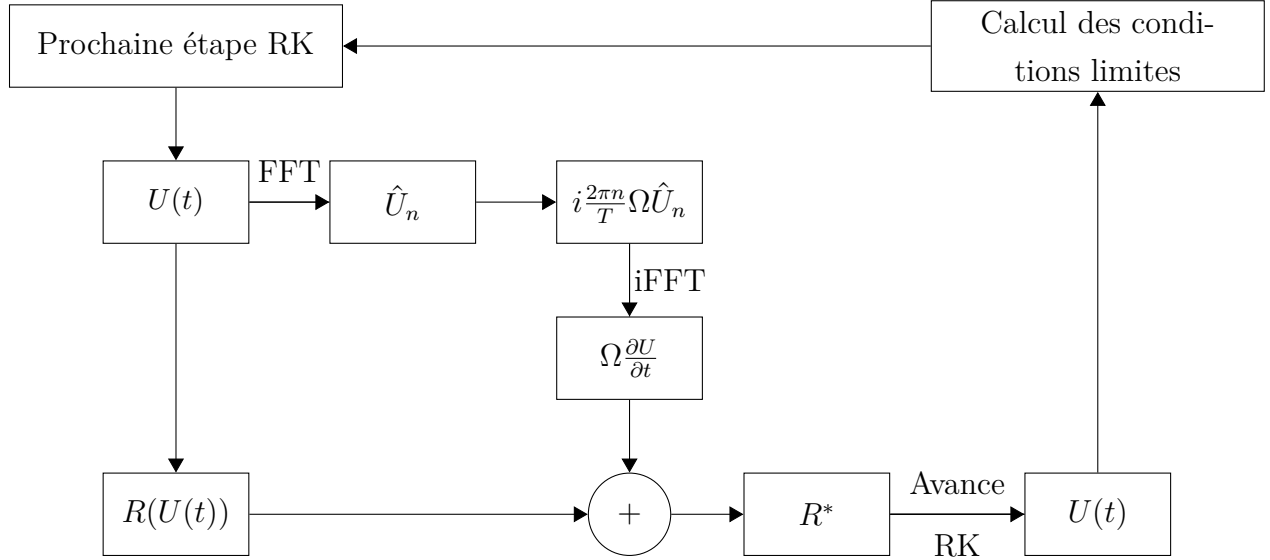


Figure 3.8 Implémentation du schéma TSM-FFT dans un solveur Runge-Kutta

Une comparaison du temps de calcul des méthodes TSM et DTS peut être effectuée en prenant comme unité de référence le temps de calcul d'un cycle multigrille. En effet, les fonctions de base du solveur sont les mêmes pour tous les schémas de calcul. Ainsi, le coût d'un cycle multigrille en DTS est sensiblement le même que celui d'une itération stationnaire. Cette métrique rend l'évaluation du temps de calcul indépendante de la machine utilisée.

Environ 15 cycles multigrilles sont réalisés par pas de temps physique pour la méthode DTS avec 196 TSPP. Puisque 4 cycles sont requis pour obtenir le régime périodique en se basant sur les coefficients de portance et de moment, on déduit un total de 11 760 cycles multigrilles. Pour la méthode TSM avec 14 modes (29 instances de temps), 150 itérations sont requises pour converger la norme L_2 du résidu de 6 ordres de grandeur. En comptant une pénalité d'environ 20% pour les opérations supplémentaires de la méthode *Time Spectral* (voir le tableau 3.1), on compte environ 5 220 fois le coût de calcul d'un cycle mutigrille. Le temps de calcul est donc de 2 à 3 fois plus faible.

Tableau 3.1 – Temps CPU pour calculer 100 cycles multigrilles

Nb. mode	Temps CPU TSM	Temps CPU NLFD	Temps CPU TSM/FFT	Coût TSM (%)	Coût NLFD (%)	Coût TSM/FFT(%)
0 (Stationnaire)	45.32	45.32	45.32	0.0	0.0	0.0
1	152.62	183.33	157.86	10.3	25.8	13.9
3	372.43	424.39	374.97	14.8	25.2	15.4
5	609.43	675.99	593.80	18.2	26.3	16.1
7	863.77	916.68	804.71	21.3	25.8	15.5
9	1129.07	1198.42	1033.74	23.7	28.1	17.1
14	1870.07	1946.00	1591.98	29.8	32.4	17.4
21	3138.88	3061.10	2417.37	37.9	36.3	19.4
28	4616.62	4075.75	3193.31	44.0	36.6	19.1

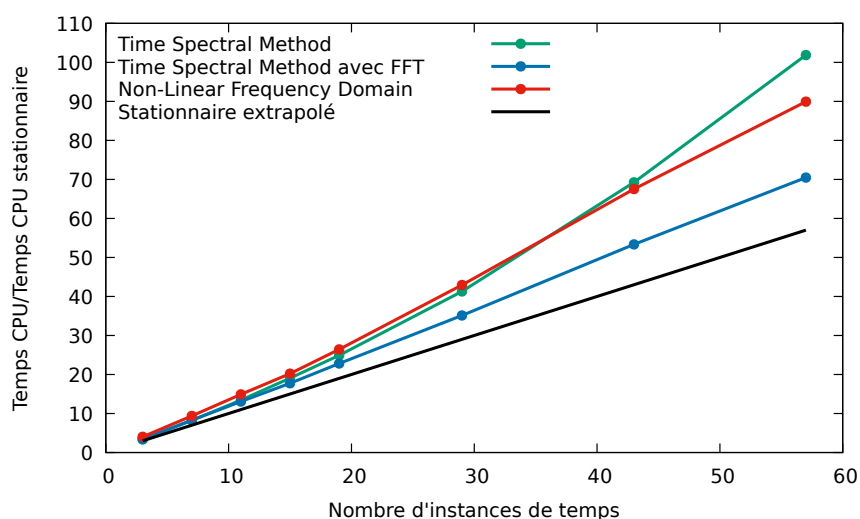


Figure 3.9 Temps CPU normalisé pour 100 cycles multigrilles

Cas test : Profil NACA0012 Euler en tangage en régime transsonique

Le cas test AGARD 5 (Landon, 1982) non visqueux est maintenant considéré. Il s'agit d'un profil NACA0012 oscillant avec une amplitude de 2.51° autour de 0.016° à une fréquence réduite de 0.0814 et un nombre de Mach de 0.755. Mundis et Mavriplis (2014) et Leffell *et al.* (2013) ont étudié ce cas avec la méthode TSM. Une particularité de ce cas test est la complexité de l'écoulement qui rend nécessaire l'utilisation d'un nombre élevé de modes. En effet, un choc se forme en alternance sur l'intrados et l'extrados. La figure 3.10 montre la convergence en nombre de modes du coefficient de traînée. On observe que de 18 à 25 modes

sont nécessaires pour capter la discontinuité du coefficient de traînée, autour de $\alpha = -2^\circ$ et 2° . La solution DTS est alors bien reproduite par la méthode TSM.

La figure 3.11 montre que les solutions de NSCODE sont similaires à celles obtenues par Mundis et Mavriplis (2014). Cependant, un léger écart est présent. Trois maillages sont présentés pour NSCODE. Le maillage de 257×257 points (courbe verte) est le maillage de base. Les maillages de 129×129 (courbe noire) et 65×65 (courbe bleue) sont obtenus en prenant une cellule sur deux dans les deux directions topologiques. Il est à noter que l'étude de raffinement en nombre de modes est réalisée avec le maillage 129×129 . L'utilisation des trois maillages suggère que l'écart avec la solution de Mundis et Mavriplis (2014) montrée en rouge peut être dû à un effet de maillage.

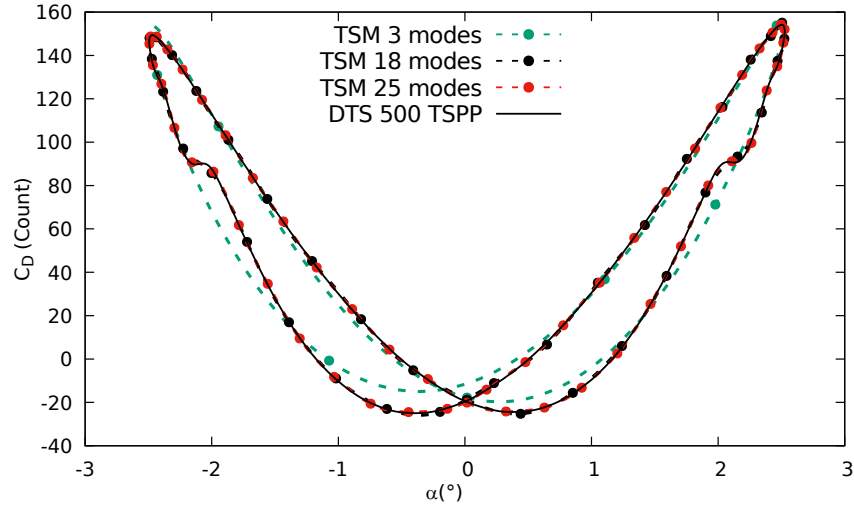


Figure 3.10 Convergence modale du coefficient de traînée pour le cas AGARD 5 non visqueux

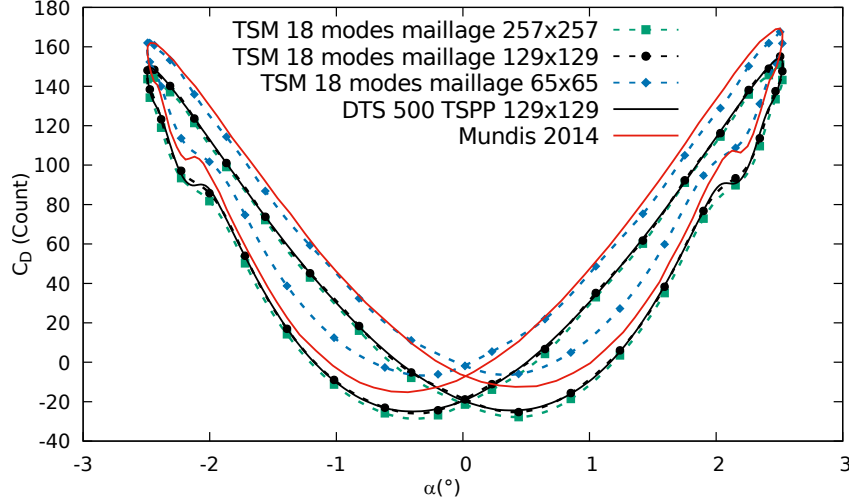


Figure 3.11 Effet du maillage sur le coefficient de traînée pour le cas AGARD 5 non visqueux

3.3.3 Schéma de résolution LU-SGS

L'implémentation d'un solveur implicite pour la méthode *Time Spectral* s'avère complexe puisque le jacobien du système d'équations :

$$\frac{\partial U}{\partial t^*} + \Omega \omega D U + R(U) = 0 \quad (3.45)$$

A^* contient des termes couplant les instances de temps en elles. En effet, avec une discrétisation Euler implicite, l'intégration en pseudotemps devient :

$$\left(\Omega \frac{I}{\Delta t^*} + \frac{\partial \bar{R}}{\partial U} \right) \Delta U^k + \Omega \omega D \Delta U^k = -R^*(U^k) \quad (3.46)$$

$$A^* \Delta U^k = -R^*(U^k) \quad (3.47)$$

avec $\Delta U^k = U^{k+1} - U^k$. La matrice jacobienne A^* , couplant les $2N + 1$ instances de temps résolues simultanément, est donc :

$$A^* = \begin{pmatrix} \left(\Omega \frac{I}{\Delta t^*} + \frac{\partial \bar{R}_1}{\partial U_1} \right) & \Omega \omega D_{1,2} I & \dots & \Omega \omega D_{1,2N+1} I \\ \Omega \omega D_{2,1} I & \left(\Omega \frac{I}{\Delta t^*} + \frac{\partial \bar{R}_2}{\partial U_2} \right) & \dots & \Omega \omega D_{2,2N+1} I \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \Omega \omega D_{2N+1,1} I & \Omega \omega D_{2N+1,2} I & \dots & \left(\Omega \frac{I}{\Delta t^*} + \frac{\partial \bar{R}_{2N+1}}{\partial U_{2N+1}} \right) \end{pmatrix} \quad (3.48)$$

où $D_{i,j}$ désigne les éléments de la matrice utilisée pour discrétiser en temps les équations de Navier-Stokes. Ainsi, chaque élément de la matrice A^* est de la dimension du jacobien d'un problème stationnaire. Les éléments sur la diagonale sont les jacobiens stationnaires pour chacune des instances de temps. Ainsi, cette matrice est coûteuse à inverser. Les termes hors de la diagonale de la matrice A^* sont donc transférés vers le membre de droite. Les instances de temps sont alors découplées ce qui permet d'utiliser un schéma LU-SGS pour intégrer en temps chacune des instances de temps. Le solveur implicite LU-SGS présenté à la section 3.1.1 est donc employé pour résoudre chaque instance de temps n :

$$\left(\Omega \frac{I}{\Delta t^*} + \frac{\partial \bar{R}_n}{\partial U_n} \right) \Delta U_n^k = -R^*(U_n^k) - \Omega \omega (D \Delta U^k)_n \quad (3.49)$$

On utilise l'implémentation block-Jacobi Successive Overrelaxation (BJ-SOR) de Sicot *et al.* (2008), où le membre de droite est mis à jour après chacun des balayages du domaine de calcul. Cet algorithme décrit par le pseudo-code 2 est sélectionné car il s'agit de l'algorithme ayant le plus de mises à jour du membre de droite pour compenser le traitement explicite du terme *Time Spectral*.

Pseudo-code 2 *Time Spectral* BJ-SOR

```

 $\Delta U_n^0 = 0$ 
for  $s = 0$  to  $s_{max} - 1$  do
  Balayage LU-SGS avant :
   $(\mathcal{L}_n + \mathcal{D}_n) \Delta U_n^{s+1/2} = - \left[ R^*(U_n^k) + \Omega \omega (D \Delta U^s)_n \right] - \mathcal{U}_n \Delta U_n^s$ 
  Balayage LU-SGS arrière :
   $(\mathcal{D}_n + \mathcal{U}_n) \Delta U_n^{s+1} = - \left[ R^*(U_n^k) + \Omega \omega (D \Delta U^{s+1/2})_n \right] - \mathcal{L}_n \Delta U_n^{s+1/2}$ 
 $U_n^{k+1} = U_n^k + \Delta U_n^{s+1}$ 

```

Cas Test : NACA0012 Euler en tangage

Un profil NACA0012 non visqueux à Mach 0.5, oscillant d'une amplitude de 2.5 ° autour de 0 ° à une fréquence réduite $k_c = 0.02$ est considéré afin de tester le schéma LU-SGS.

La figure 3.12(a) montre la convergence itérative. On observe que le nombre d'itérations requises pour le schéma implicite est deux fois plus faible que pour le schéma Runge-Kutta, ce qui est attendu d'un schéma implicite. On observe aussi que le nombre d'itérations requises pour converger le solveur demeure constant avec l'augmentation du nombre de modes. Cependant, la figure 3.12(b) indique que le temps de calcul est sensiblement le même pour

les deux solveurs. Ce résultat est cohérent puisque le schéma LU-SGS requiert des opérations coûteuses.

La figure 3.13 montre les coefficients de portance et de traînée obtenues avec les deux schémas d'intégration ainsi que la solution DTS. Les solutions sont toutes identiques ce qui est normal puisque le schéma de résolution en pseudotemps ne doit pas affecter la solution convergée.

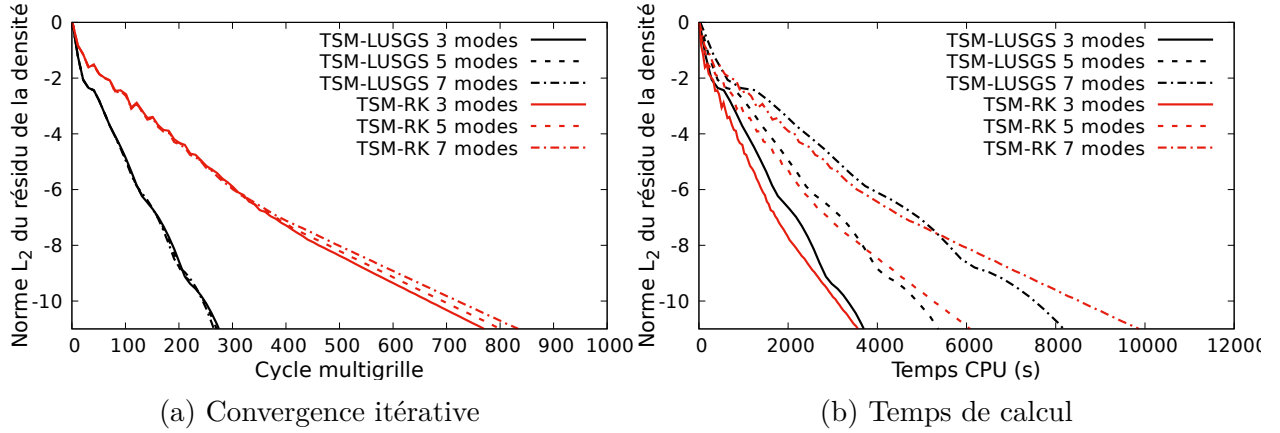


Figure 3.12 Comparaison des schémas RK et LU-SGS pour le profil NACA0012 en tangage

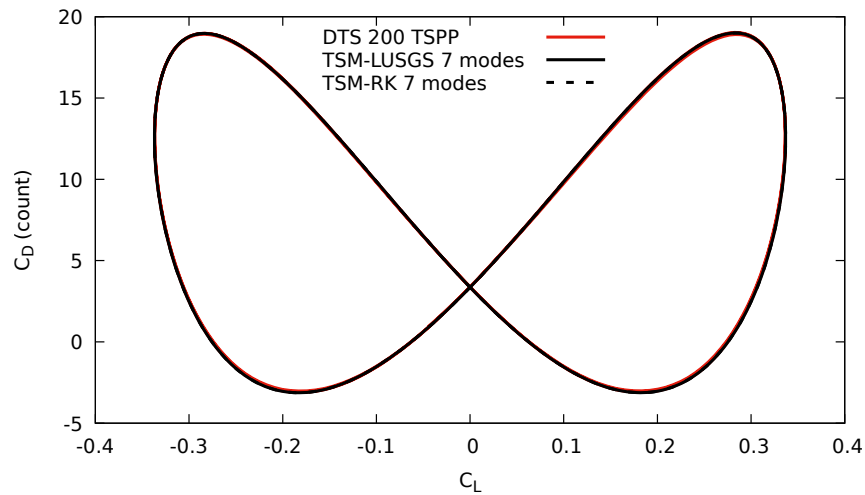


Figure 3.13 Coefficients de portance et de traînée pour le profil NACA0012 en tangage

3.3.4 Adaptation de la période

Cette sous-section présente l'implémentation de deux algorithmes de résolution de la fréquence. Le premier est basé sur le gradient des résidus et le second sur le déphasage d'un paramètre global. Ces méthodes sont ensuite vérifiées pour le calcul du lâcher tourbillonnaire derrière un cylindre et un profil NACA0012 en régime laminaire.

La méthode d'adaptation GBVTP (Gradient Based Variable Time Period) de McMullen (2003) est implémentée. Cette méthode vise à minimiser le résidu modifié R_n^* , où n est l'index de l'instance de temps. Le résidu modifié est alors considéré comme une fonction de la période imposée et une méthode d'optimisation basée sur le gradient est utilisée. Dans NSCODE, la méthode est modifiée pour prendre en compte l'implémentation du schéma spectral avec le terme TSV et les fonctions de filtrage :

$$\begin{aligned} R_n^* &= \Omega\omega(D_F U)_n - \Omega\omega^2(D_2 U)_n + R(U)_n \\ &= \frac{2\Omega\pi}{T}(D_F U)_n - \frac{4\Omega\pi^2}{T^2}(D_2 U)_n + R(U)_n \end{aligned} \quad (3.50)$$

Le gradient du carré de R_n^* selon la période T est utilisé.

$$\begin{aligned} R_n^{*2} &= \frac{4\Omega^2\pi^2}{T^2}(D_F U)_n(D_F U)_n + \frac{4\Omega\pi}{T}(D_F U)_n R_n - \frac{16\Omega^2\pi^3}{T^3}(D_F U)_n(D_2 U)_n \\ &\quad + R(U)_n R(U)_n - \frac{8\Omega\pi^2}{T^2}(D_2 U)_n R(U)_n + \frac{16\Omega^2\pi^4}{T^4}(D_2 U)_n(D_2 U)_n \end{aligned} \quad (3.51)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial R_n^{*2}}{\partial T} &= -\frac{8\Omega^2\pi^2}{T^3}(D_F U)_n(D_F U)_n - \frac{4\Omega\pi}{T^2}(D_F U)_n R(U)_n + \frac{48\Omega^2\pi^3}{T^4}(D_F U)_n(D_2 U)_n \\ &\quad + \frac{16\Omega\pi^2}{T^3}R(U)_n(D_2 U)_n - \frac{64\Omega^2\pi^4}{T^5}(D_2 U)_n(D_2 U)_n \end{aligned} \quad (3.52)$$

On peut retrouver la formulation de Gopinath et Jameson (2006) en négligeant D_2 .

$$\frac{\partial R_n^{*2}}{\partial T} = -\frac{8\Omega^2\pi^2}{T^3}(D_F U)_n(D_F U)_n - \frac{4\Omega\pi}{T^2}(D_F U)_n R(U)_n \quad (3.53)$$

$$\frac{1}{2} \frac{\partial R_n^{*2}}{\partial T} = \left[\Omega \frac{2\pi}{T} (D_F U)_n + R(U)_n \right] \left[-\Omega \frac{2\pi}{T^2} (D_F U)_n \right] \quad (3.54)$$

$$\frac{1}{2} \frac{\partial R_n^{*2}}{\partial T} = -R_n^* \Omega \frac{2\pi}{T^2} (D_F U)_n \quad (3.55)$$

Suivant Gopinath et Jameson (2006) le gradient est moyenné sur tout le domaine de calcul et toutes les instances de temps pour donner le gradient moyen $\frac{\partial \bar{R}^{*2}}{\partial T}$, et un gain ΔT est appliqué. Ce gain doit être suffisamment grand pour converger rapidement, sans toutefois rendre l'algorithme instable. Un limiteur peut être appliqué afin d'éviter une modification trop rapide de la fréquence. Ainsi, à chaque pseudo-itération k , la période est modifiée comme suit :

$$T^{k+1} = T^k - \Delta T \frac{\partial \bar{R}^{*2}}{\partial T} \quad (3.56)$$

Un deuxième algorithme, basé sur celui de Kielb *et al.* (2006) est implémenté. Cet algorithme que l'on peut nommer *Phase Based Variable Time Period* (PBVTP) procède en minimisant le déphasage du signal du coefficient de portance entre chacune des itérations. Les observations montrent que le déphasage par itération est constant pour une fréquence donnée et varie linéairement selon la fréquence imposée. Cependant, il ne devient constant qu'après l'atteinte d'un "plateau" dans la convergence. La mise à jour de la période est donc faite avec le pseudo-code 3, où le nombre d'itérations entre chaque application de la méthode PBVTP est prescrit par l'utilisateur. Cet algorithme permet une mise à jour automatique de la période.

Pseudo-code 3 Phase Based Variable Time Period

PBVTP = Nombre d'itérations entre les mises à jour de la période

for *iteration* **do**

 Iteration pseudotemporelle (RK ou LU-SGS)

 Calcul du déphasage du coefficient de portance

 Garder le déphasage actuel et celui de l'itération précédente

if PBVTP = 0 **then**

 Calcul du zéro de la droite entre le déphasage actuel et précédent $\rightarrow T_0$

 Mise à jour de la période $T = T_0$

 PBVTP = Nombre d'itérations entre les mises à jour de la période

 PBVTP = PBVTP - 1

Il est à noter que ces deux algorithmes peuvent être appliqués aussi bien à la méthode *Time Spectral* qu'à la méthode *Non-Linear Frequency Domain*.

Cas test : Lâcher tourbillonnaire laminaire derrière un cylindre

Le premier cas test pour l'adaptation de la période est l'écoulement incompressible autour d'un cylindre à un nombre de Reynolds basé sur le diamètre de 180. Un nombre de Mach de 0.2 est imposé afin de minimiser les effets de compressibilité. Dans ces conditions, on s'attend à un lâcher tourbillonnaire à un nombre de Strouhal d'environ 0.2.

La procédure de calcul employée est de simuler un cylindre oscillant avec une amplitude de 0.1 diamètre et une fréquence basée sur un Strouhal de 0.2 pendant 100 itérations. Une perturbation est ainsi introduite entre les instances de temps du solveur *Time Spectral*. La simulation est ensuite poursuivie avec un cylindre fixe, et l'adaptation de la période débute à l'itération 500. Des simulations avec une période fixe sont aussi réalisées.

La figure 3.14 montre la convergence du résidu de la densité. Les calculs avec les deux algorithmes de résolution de la période sont montrés en noir. On observe que l'adaptation de la période permet d'obtenir une convergence à la précision machine. Ce résultat vérifie l'implémentation des méthodes d'adaptation de la période puisqu'elles permettent au solveur de converger et la période obtenue est de 20.8751 ($St = 0.2024$). Les autres courbes sont obtenues en imposant une période fixe légèrement différente de la période exacte. On observe que la convergence du solveur est extrêmement sensible à la fréquence imposée. Par exemple, l'imposition d'une période de 20.8 (trait rouge plein) limite la convergence du résidu de la densité à environ 2.5 de grandeur. L'algorithme d'adaptation de la fréquence est donc essentiel.

La figure 3.15(a) montre la valeur du résidu de la densité obtenu pour une sélection de périodes imposée. On observe, comme à la figure 3.14, que la convergence du solveur TSM n'est possible qu'avec une fréquence imposée très précise. La figure 3.15(b) montre le déphasage du signal du coefficient de portance par centaine d'itérations. Ce résultat montre que la variation du déphasage en fonction de la période est linéaire autour de la période exacte. C'est-à-dire la période pour laquelle le déphasage est nul. L'hypothèse soutenant l'algorithme PBVTP est donc valide. Les résultats montrés à la figure 3.15 sont similaires aux observations de Kielb *et al.* (2006). Il est à noter que le solveur diverge pour les périodes trop éloignées de la période exacte.

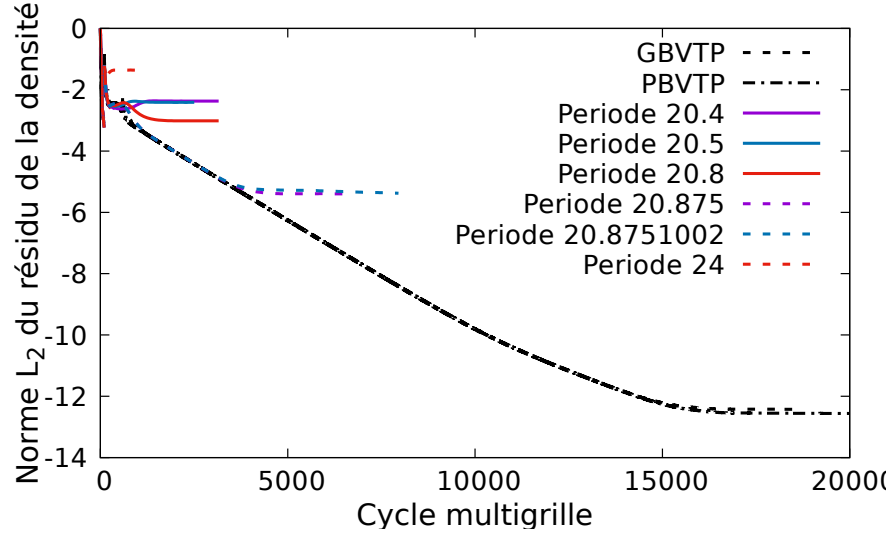


Figure 3.14 Effet de la période sur la convergence du cylindre laminaire

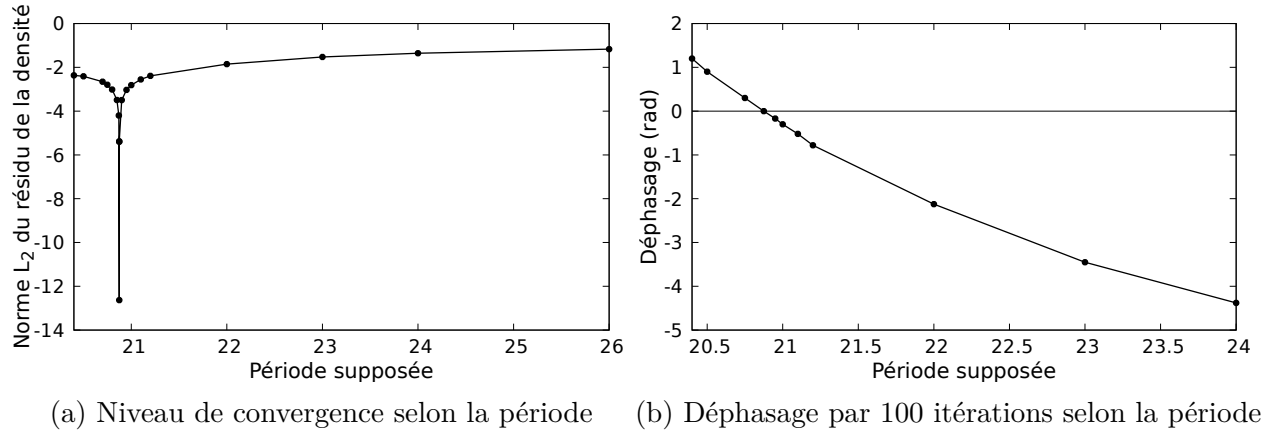


Figure 3.15 Illustration du principe de la méthode GBVTP et PBVTP

Une étude de la convergence selon le nombre de modes est effectuée et un calcul DTS avec une centaine d'itérations temporelles par période est réalisé. Les figures 3.16(a) et (b) montrent que les coefficients de portance et de traînée obtenus avec la méthode *Time Spectral* concordent avec ceux de la méthode *Dual Time Stepping*.

La figure 3.17(a) montre la convergence du résidu de la densité selon le nombre de modes. On observe que la convergence du solveur n'est pas affectée par le nombre de modes. Cependant, la figure 3.17(b) indique que la période finale varie grandement selon le nombre de modes utilisés. La période convergée avec 3 modes est différente de celle obtenue avec

5 modes, mais varie peu entre 5 et 9 modes. Le tableau 3.2 montre l'erreur sur la période en raffinant le nombre de modes. Ces résultats sont illustrés sur un graphique semi-log à la figure 3.18. Ce graphique, similaire à celui présenté par Gopinath et Jameson (2006), montre la convergence exponentielle du solveur *Time Spectral*. Finalement, on observe un nombre de Strouhal similaire entre les solutions TSM et la solution DTS.

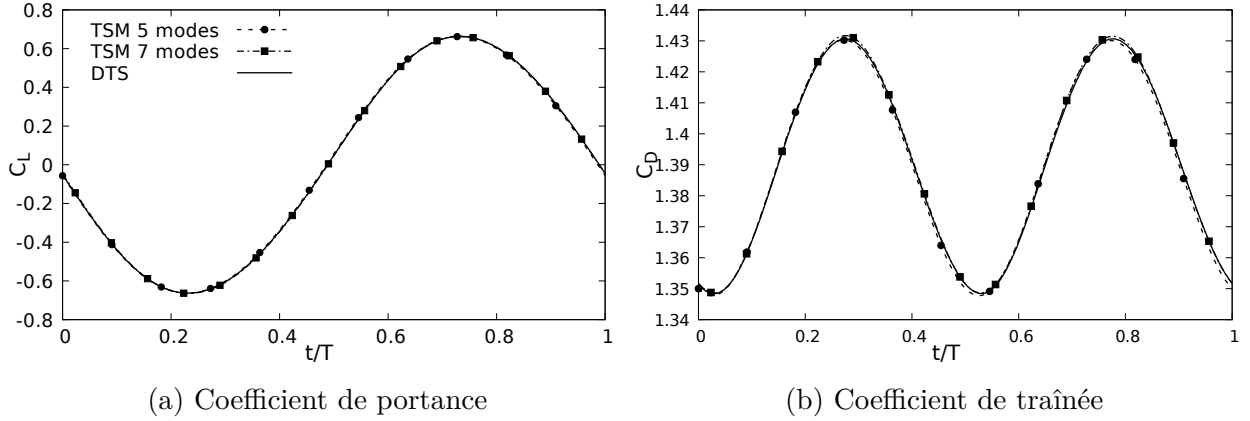


Figure 3.16 Coefficients aérodynamiques pour l'écoulement autour d'un cylindre laminaire

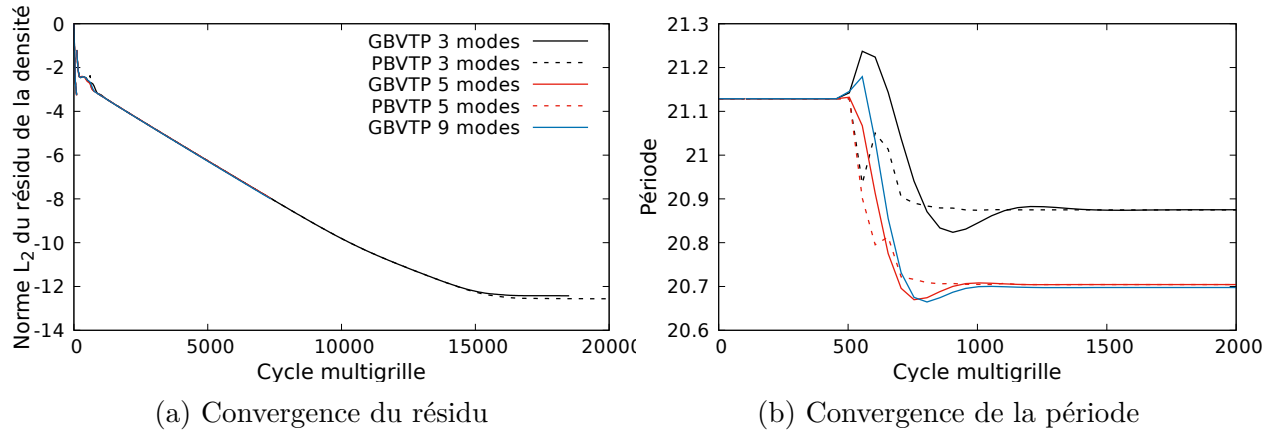


Figure 3.17 Convergence de l'écoulement laminaire autour d'un cylindre

Tableau 3.2 – Convergence de la période selon le nombre de modes pour le cas du cylindre laminaire

Cas	Période	Strouhal fD/U_∞	Erreur (%)
3 modes	20.8751	0.2024312	0.858082
5 modes	20.7045	0.2040994	0.033729
7 modes	20.6983	0.2041601	0.003955
9 modes	20.6976	0.2041674	0.000041
11 modes	20.6975	0.2041680	0.000008
13 modes	20.6975	0.2041682	-
DTS 100 TSPP	20.7063	0.2040816	-

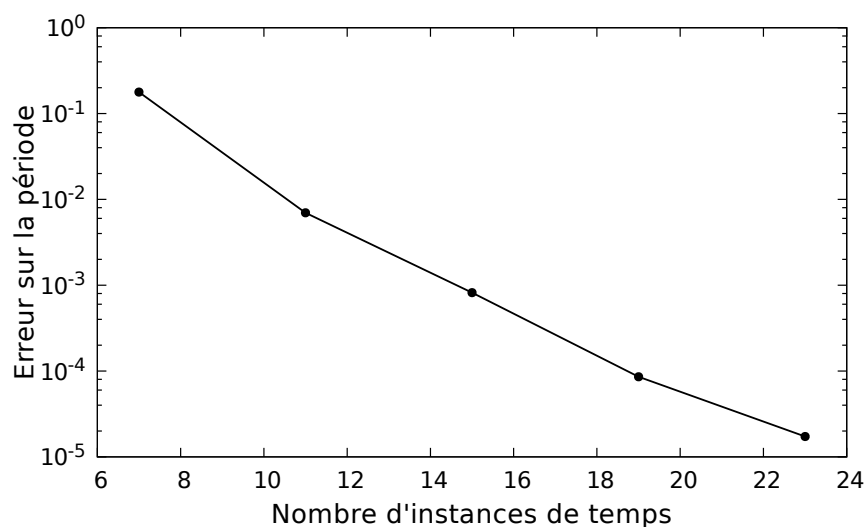


Figure 3.18 Convergence de la période selon le nombre de modes pour le cas du cylindre laminaire

Cas Test : Lâcher tourbillonnaire laminaire derrière un profil NACA0012

Un cas test similaire est maintenant considéré, soit le cas du lâcher tourbillonnaire d'un profil NACA0012 en régime laminaire à un nombre de Reynolds de 1000 et un angle d'attaque de 20° . La procédure de calcul est similaire à celle du cylindre. On débute avec 1000 itérations avec un profil fixe. Ensuite, l'écoulement est perturbé avec une oscillation en incidence d'une amplitude de 1° et de période égale à celle prescrite dans le solveur *Time Spectral*. Le calcul est ensuite poursuivi avec un profil fixe et l'adaptation de la période avec l'algorithme GBVTP débute à l'itération 2000.

La figure 3.19 montre la convergence du résidu de la densité et de la période à partir de différentes périodes initiales allant de 5.0 à 12.0, avec un nombre de modes de 5. La figure 3.19(a) montre que toutes les simulations présentent le même taux de convergence. Notons que plus la fréquence initiale est proche de la fréquence exacte ($T \approx 8.0$), plus rapide est la convergence. Ce résultat est cohérent puisque l'algorithme d'optimisation de la période démarre plus près du minimum. On observe aussi un plateau de convergence avant le début de l'adaptation de la période. Ce plateau se termine au moment où l'adaptation de la période débute, ce qui coïncide avec l'imposition d'une période permettant la convergence du solveur. Finalement, la figure 3.19(b) montre que toutes les simulations convergent à une même fréquence. L'adaptation de la période est donc robuste et permet de converger depuis un large intervalle de période initiale.

La figure 3.20 montre l'effet du nombre de modes sur la convergence. On observe que la convergence du résidu à la figure 3.20(a) n'est pas affectée par le nombre de modes. Cependant, la figure 3.20(b) montre que la période du phénomène est grandement affectée par le nombre de modes entre 5 (courbe rouge) et 7 (courbe verte). Au minimum, 7 modes doivent donc être considérés pour ce cas. Finalement, on observe à la figure 3.21 que la solution *Time Spectral* avec 7 modes reproduit la solution DTS calculée avec 500 pas de temps par période pour les coefficients de portance et de traînée.

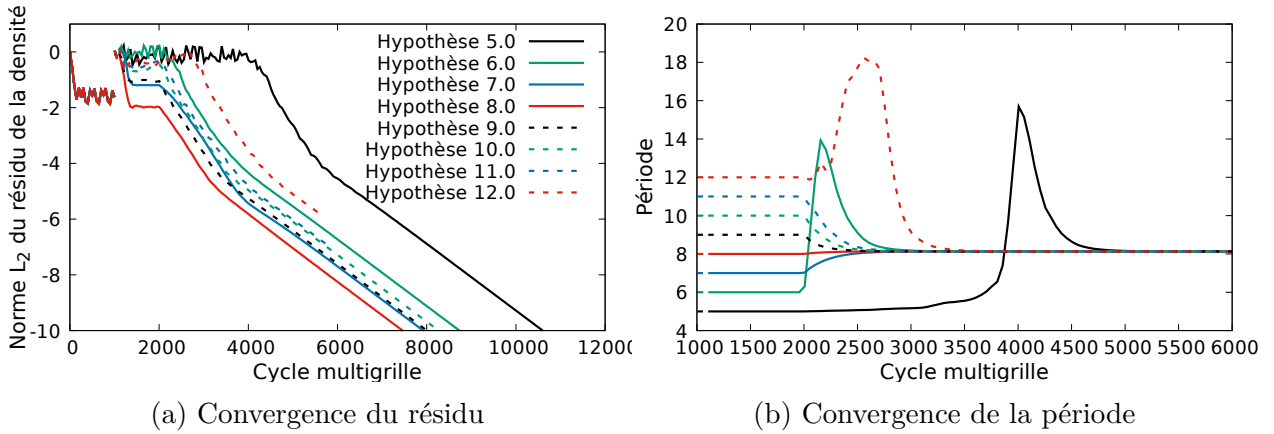


Figure 3.19 Convergence des lâchers tourbillonnaires laminaires du profil NACA0012 selon la période initiale

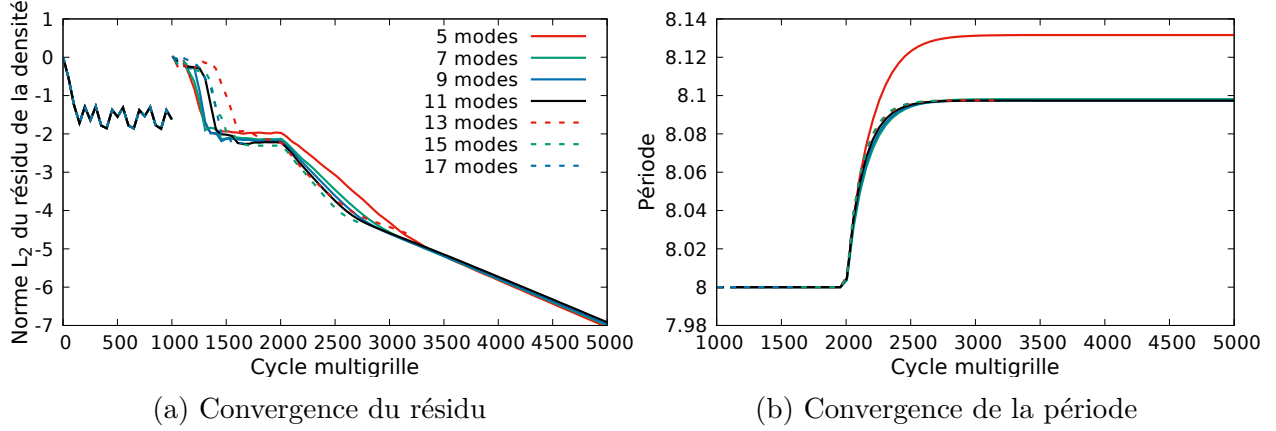


Figure 3.20 Convergence des lâchers tourbillonnaires laminares du profil NACA0012 selon le nombre de modes

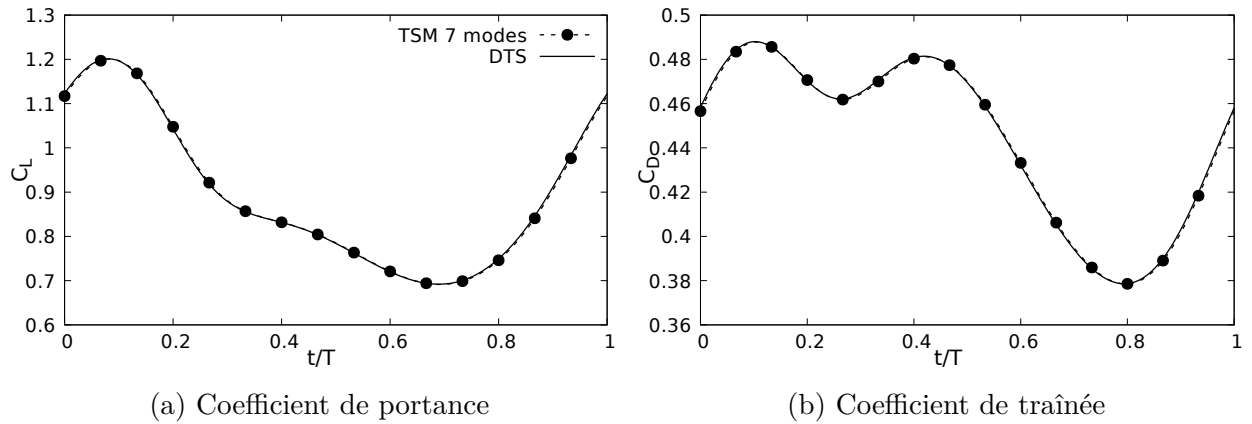


Figure 3.21 Coefficients aérodynamiques du profil NACA0012 à haut angle d'attaque

Les deux cas tests montrent que les algorithmes d'adaptation de la période permettent de converger vers une solution identique à celle des calculs *Dual Time Stepping*. Il est aussi montré que ces méthodes sont essentielles puisque la convergence du solveur est très sensible à la fréquence supposée. La robustesse de l'adaptation de la période est démontrée puisque ces algorithmes convergent systématiquement vers la même fréquence pour un grand intervalle de fréquence initiale autour de la fréquence exacte. Cependant, une estimation de la fréquence du phénomène est requise pour l'initialisation du solveur.

3.3.5 Modèles de turbulence

Afin de permettre la simulation d'écoulements turbulents, les modèles de turbulence employant une ou plusieurs équations de transport sont implémentés avec la méthode *Time Spectral*. Ainsi, pour le modèle de Spalart-Allmaras, on discrétise le terme $\frac{\partial \tilde{\nu}}{\partial t}$ comme :

$$\frac{\partial \tilde{\nu}}{\partial t} = \omega D_F \tilde{\nu} - \omega^2 D_2 \tilde{\nu} \quad (3.57)$$

avec $\tilde{\nu} = [\tilde{\nu}_1, \tilde{\nu}_2, \dots, \tilde{\nu}_{2N+1}]^t$

La même discrétisation est appliquée aux équations de k et ω pour le modèle $k - \omega$ *SST*. Puisque la modification d'Edwards-Chandra et la correction de compressibilité du modèle de Spalart-Allmaras font partie des termes de production et de destruction du modèle, l'implémentation *Time Spectral* s'applique aussi à ces modèles. L'importance de la *Temporal Spectral Viscosity*, soit le terme D_2 , sera montrée dans les prochaines sections. Le limiteur proposé par Leffell *et al.* (2013) est employé afin d'éviter d'obtenir des valeurs de viscosité turbulente négatives dues au phénomène de Gibbs. Le terme de dérivée en temps est donc forcé à zéro lorsqu'il occasionne une viscosité turbulente négative.

Le modèle de turbulence est résolu avec le même schéma implicite que pour le solveur de base. Cependant, une approche analogue à celle de Sicot *et al.* (2008) pour la solution des équations de Navier-Stokes est utilisée. Ainsi, le terme *Time Spectral* est traité explicitement et mis à jour à chacune des itérations du solveur.

Trois cas tests sont considérés, soit un profil NACA0015 en tangage à basse et haute fréquence et le cas test transonic AGARD 5. Ces cas tests sont choisis afin de mettre en évidence plusieurs difficultés se posant lors de la résolution des modèles de turbulence comme le phénomène de Gibbs et des problèmes de convergence.

Cas test : Profil NACA0015 en tangage basse fréquence

Le calcul d'écoulements turbulents avec la méthode *Time Spectral* est vérifié pour le cas d'un profil NACA0015 oscillant en tangage avec une fréquence réduite $k_c = f\pi c/U_\infty$ de 0.038 et une amplitude de 2.0° . L'angle d'attaque moyen est de 4.01° , le nombre de Reynolds de 2 millions et le nombre de Mach de 0.289. Ce cas test est tiré de Piziali (1994).

Afin d'obtenir une solution de référence, ce cas est calculé avec la méthode *Dual Time Stepping* avec 1000 pas de temps par période d'oscillation. Ce pas de temps assure l'obtention d'une solution indépendante de ce dernier. La figure 3.22 montre la convergence modale avec le schéma TSM en utilisant le modèle de turbulence $k-\omega$ SST. On observe que peu de modes sont requis afin d'obtenir la même solution en coefficient de portance (figure 3.22(a)) et de traînée (figure 3.22(b)) que la méthode DTS. Un seul mode est suffisant pour la portance, alors que 3 modes sont requis pour le coefficient de traînée. La figure 3.23 montre le cycle C_D selon C_L pour les deux modèles de turbulence. On observe que la même solution est obtenue en DTS et en TSM pour chacun des modèles de turbulence.

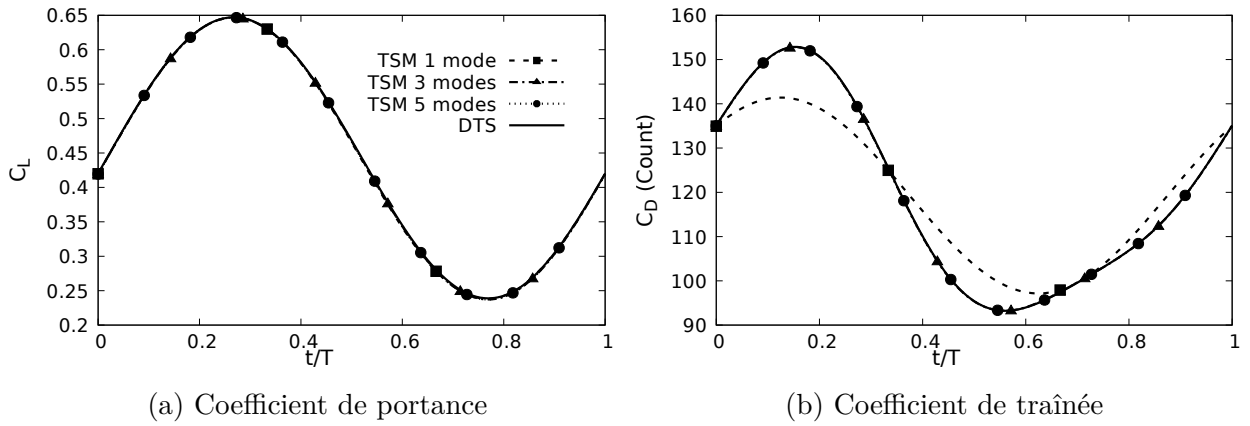


Figure 3.22 Convergence modale pour le profil NACA0015 avec $k_c = 0.038$

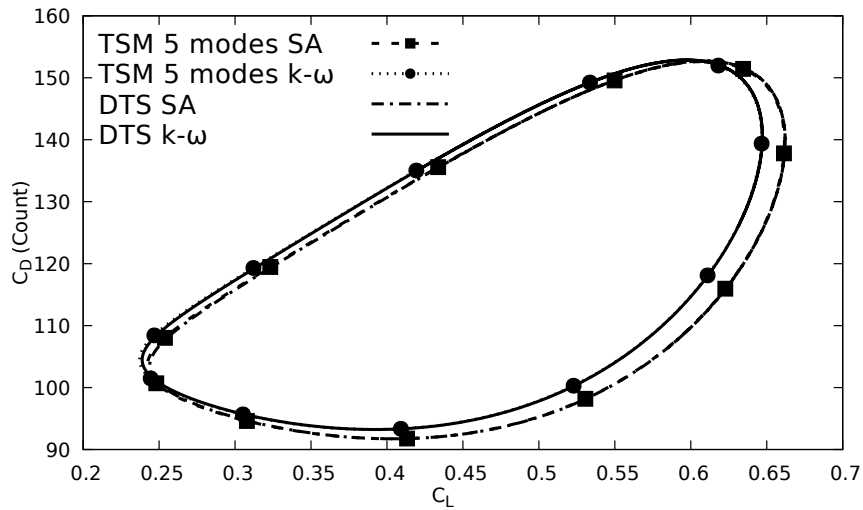


Figure 3.23 Coefficients de portance et de traînée pour le profil NACA0015 avec $k_c = 0.038$

La figure 3.24 montre la convergence itérative obtenue pour les deux solveurs et les deux modèles de turbulence avec 5 modes. La convergence de la densité, de $\tilde{\nu}$, de k et de ω est montrée. Les convergences obtenues pour le calcul stationnaire (trait hachuré) à l'angle moyen de l'oscillation sont aussi présentées aux fins de comparaison, et un nombre de CFL de 100 est utilisé pour le solveur implicite LU-SGS. On observe qu'environ deux fois moins d'itérations sont nécessaires pour converger la densité (courbe noire) à la précision machine avec le solveur LU-SGS, ce qui est attendu pour un schéma implicite. On observe aussi que la convergence des calculs TSM est pratiquement identique à celle des calculs stationnaires. Cependant, la convergence de $\tilde{\nu}$ aux figures 3.24(b) et (d) atteint un plateau à 4 ordres de grandeur pour la simulation TSM ce qui n'est pas le cas pour le calcul stationnaire. Ainsi, bien que la solution TSM soit identique à celle de la simulation DTS pour les coefficients de force, la cause du plateau dans la convergence de $\tilde{\nu}$ doit être étudiée.

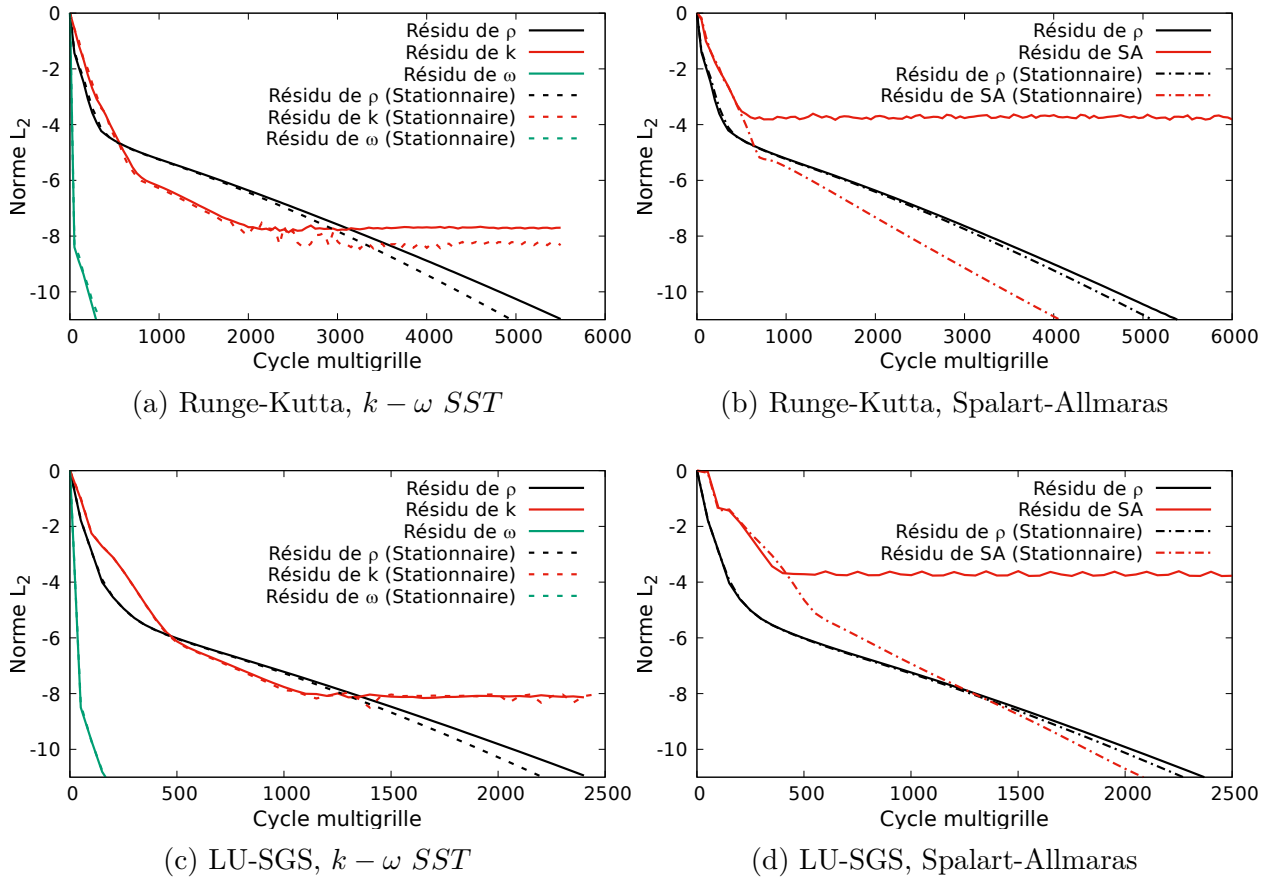


Figure 3.24 Convergence itérative pour le profil NACA0015 avec $k_c = 0.038$

Tel que mentionné précédemment, un limiteur est appliqué pour la résolution des modèles de turbulence avec la méthode *Time Spectral*. D'après la suggestion de Leffell *et al.* (2013),

pour pallier au phénomène de Gibbs, la dérivée temporelle de $\tilde{\nu}$ est mise à zéro lorsque son application entraîne une valeur négative de viscosité turbulente. Ainsi, la figure 3.25 montre les contours de $\tilde{\nu}$ à trois instants avec une région cachée pour indiquer les cellules où le terme $\frac{\partial \tilde{\nu}}{\partial t}$ est limité. Ces régions sont situées en bordure du sillage ce qui concorde avec des régions où une variation rapide de $\tilde{\nu}$ dans le temps est présente. Il s'agit aussi de zone où $\tilde{\nu}$ est proche de la valeur au champ lointain. Il s'agit donc de zones où le phénomène de Gibbs et une surévaluation de la dérivée temporelle peuvent être observés. À l'opposé, aucun point n'est limité lorsque le modèle $k - \omega$ SST est employé ce qui explique la convergence similaire à celle du cas stationnaire. L'application du limiteur explique donc le plateau de convergence observé avec le modèle de Spalart-Allmaras puisque les cellules limitées sont considérées dans le calcul du résidu.

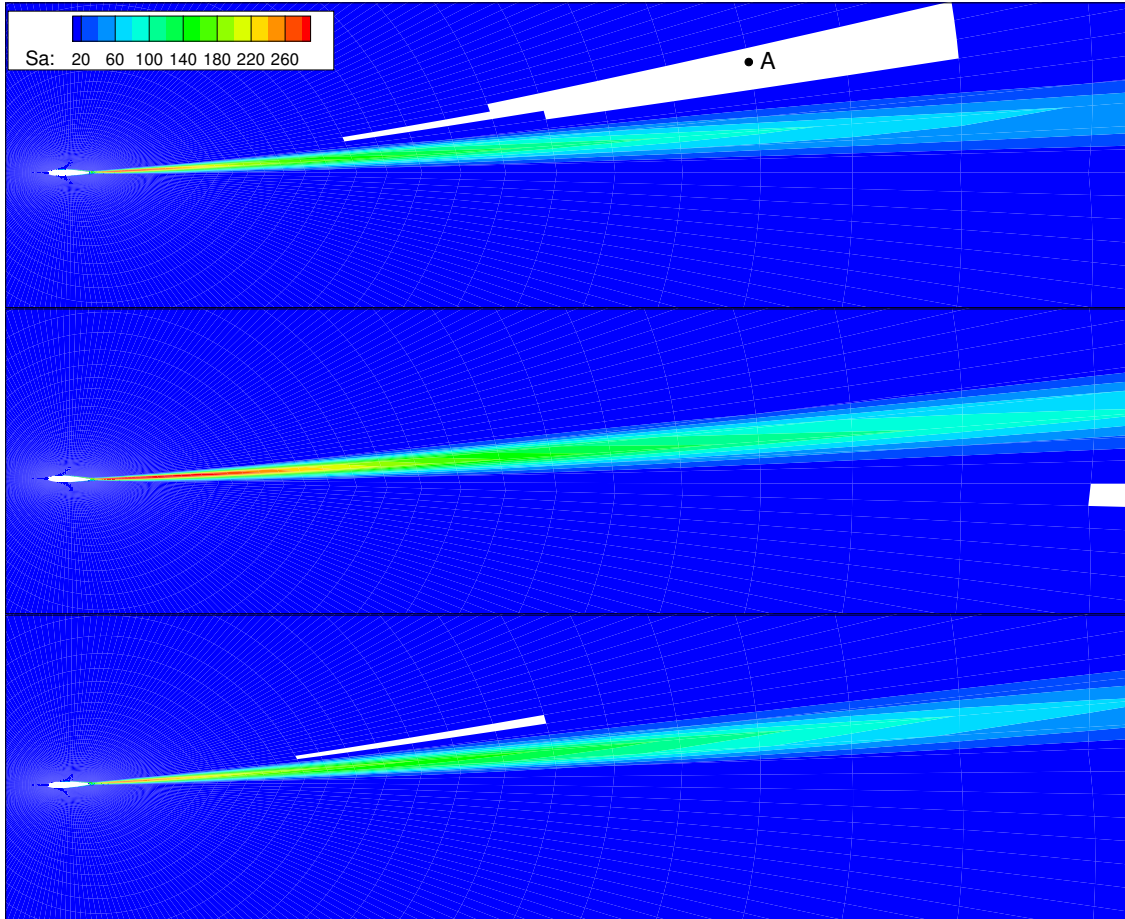


Figure 3.25 Contours de $\tilde{\nu}$ aux instances de temps 1, 4 et 8 sur 11 pour le profil NACA0015 avec $k_c = 0.038$

Plusieurs valeurs de $\tilde{\nu}_\infty$ sont testées afin de montrer l'impact du limiteur de la dérivée temporelle sur la convergence du modèle de turbulence. La figure 3.26 montre que la convergence est améliorée en employant une valeur plus élevée de $\tilde{\nu}_\infty$, soit $3 \nu_\infty$ et $5 \nu_\infty$. Il est à noter que lorsqu'une valeur de $\tilde{\nu}_\infty$ de $3 \nu_\infty$ et de $5 \nu_\infty$ est imposée, soit les traits hachurés, le limiteur n'est plus utilisé à convergence. Le solveur converge alors à 8 ordres de grandeur. D'ailleurs, avec $\tilde{\nu}_\infty = 5\nu_\infty$, une convergence pratiquement identique à celle du calcul stationnaire est retrouvée.

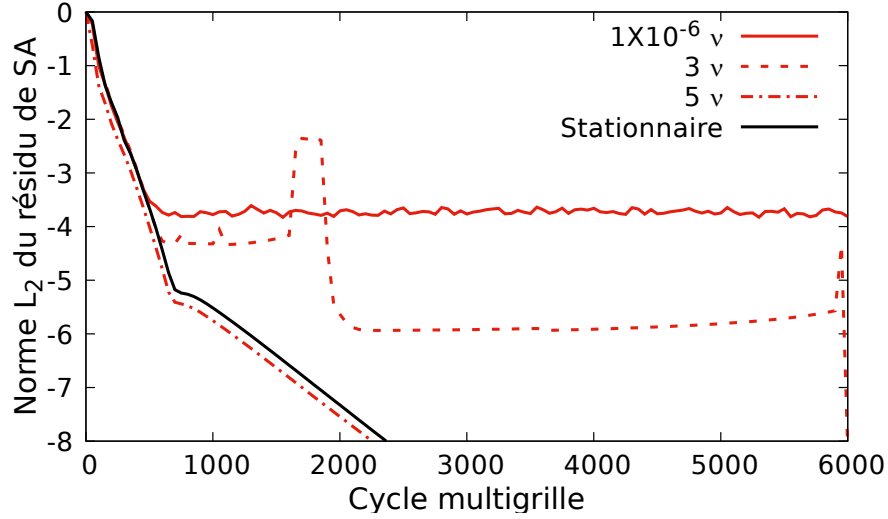


Figure 3.26 Effet de $\tilde{\nu}_\infty$ sur la convergence du modèle de Spalart-Allmaras avec $k_c = 0.038$

La figure 3.27 montre l'évolution de $\tilde{\nu}$ et de sa dérivée pour le point de maillage A de la figure 3.25, un point limité pour certaines instances de temps. La valeur de $\tilde{\nu}$ est soustraite de la valeur au champ lointain pour simplifier l'affichage, et les cercles rouges entourent les points limités. L'écart observé à la figure 3.27(a) entre la solution DTS et les solutions TSM avec des niveaux différents de $\tilde{\nu}_\infty$ est attendu. Pour le schéma DTS on observe que la valeur de $\tilde{\nu}$ est égale à $\tilde{\nu}_\infty$ pour une grande partie du cycle. Dans le cas des solutions TSM, une oscillation autour de $\tilde{\nu}_\infty$ est présente. Lorsque $\tilde{\nu}_\infty$ est presque nul, cette oscillation occasionne des valeurs de viscosité turbulente négative. Cependant, avec une valeur de $\tilde{\nu}_\infty$ plus élevée, la positivité de $\tilde{\nu}$ est assurée. Néanmoins, on observe à la figure 3.27(b) que les oscillations de la dérivée temporelle sont présentes pour tous les calculs TSM. Ainsi, on peut éviter l'utilisation du limiteur, mais le phénomène de Gibbs cause toujours une légère erreur.

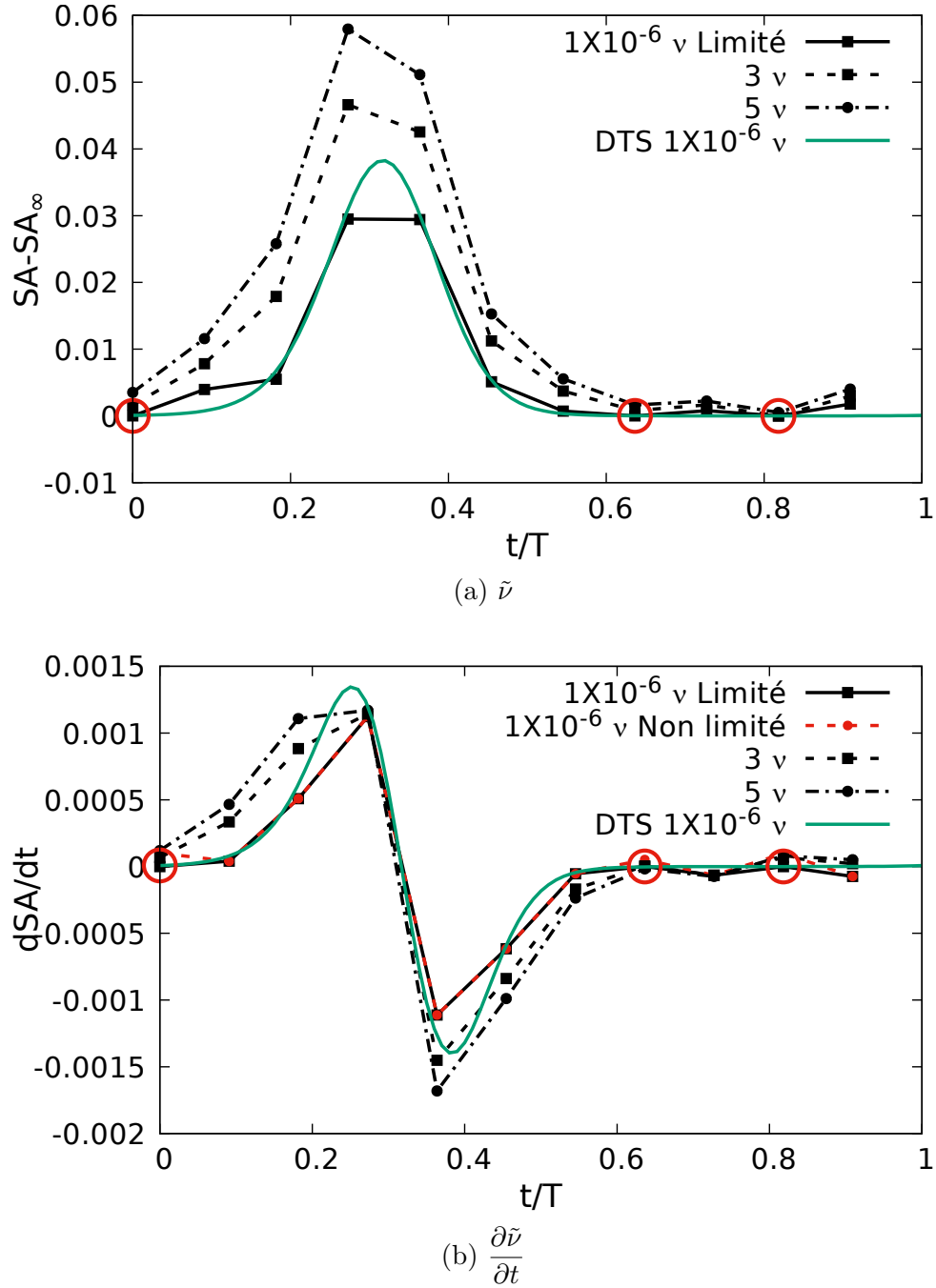


Figure 3.27 Effet de $\tilde{\nu}_\infty$ sur l'évolution temporelle de $\tilde{\nu}$ pour le profil NACA0015 avec $k_c = 0.038$

Pour terminer cette analyse, la figure 3.28 montre le cycle des coefficients de portance et de traînée obtenus avec les différents niveaux de turbulence à la condition champ lointain. On observe que la valeur ν_∞ a peu d'effet sur la solution. Ainsi, l'utilisation de valeurs plus

élevées de $\tilde{\nu}_\infty$ améliore la convergence, lorsque le limiteur est employé. Cependant, cet effet n'améliore pas nécessairement la solution puisque le phénomène de Gibbs n'est pas éliminé.

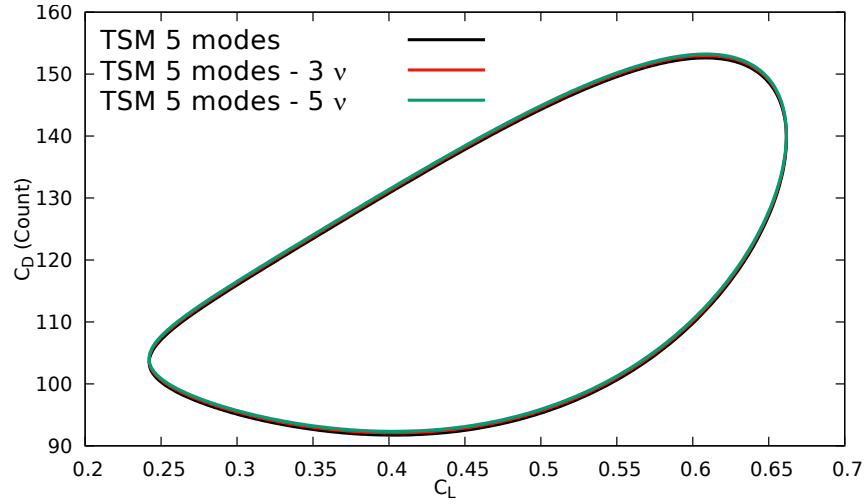


Figure 3.28 Effet de $\tilde{\nu}_\infty$ sur les coefficients de portance et de traînée pour le profil NACA0015 avec $k_c = 0.038$

Cas test : Profil NACA0015 en tangage haute fréquence

Le même cas test est maintenant considéré avec une amplitude d'oscillation de 2.31° et en augmentant la fréquence réduite à $k_c = 0.19$. L'analyse de la convergence en nombre de modes est menée avec le modèle de turbulence de Spalart-Allmaras. Les résultats montrés à la figure 3.29 indiquent encore une fois que de 2 à 3 modes (5 à 7 instances de temps) sont suffisants pour reproduire la solution DTS. Ainsi, la fréquence d'oscillation a peu d'effet sur le nombre de modes requis. La comparaison entre la solution *Time Spectral* et DTS pour les deux modèles de turbulence est présentée à la figure 3.30. On observe que la méthode *Time Spectral* permet encore une fois de reproduire la solution DTS pour les deux modèles de turbulence.

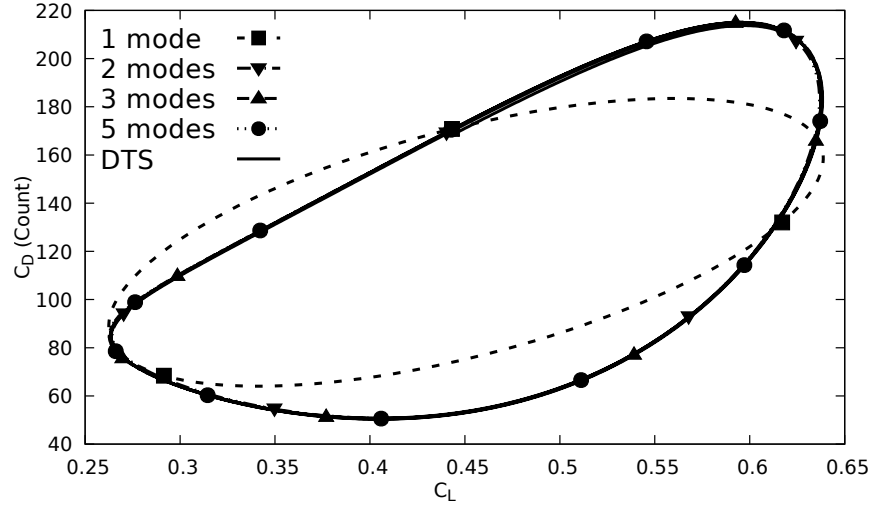


Figure 3.29 Convergence modale pour le profil NACA0015 avec $k_c = 0.19$

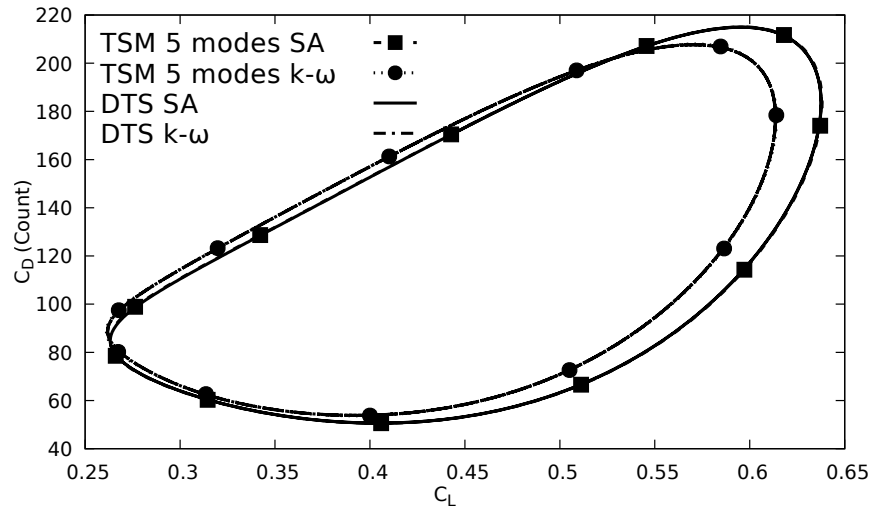


Figure 3.30 Coefficients de portance et de traînée pour le profil NACA0015 avec $k_c = 0.19$

La figure 3.31 présente les convergences itératives de la densité, $\tilde{\nu}$, k et ω pour 5 modes. Seules les convergences du solveur Runge-Kutta sont montrées puisque le schéma LU-SGS échoue à converger avec l'imposition d'un nombre de CFL élevé. Le schéma perd donc son avantage par rapport au schéma explicite. Cette observation est probablement due au traitement explicite des termes de couplage entre les instances de temps, puisque ceux-ci deviennent plus importants avec l'augmentation de la fréquence. On observe que le résidu de la densité, en noir, converge à la précision machine pour les deux modèles de turbulence. Aussi, la figure

3.31(a) montre que la convergence de la variable k atteint un plateau de convergence autour de 4 ordres de grandeur. De plus, contrairement au cas basse fréquence, un nombre d'itérations beaucoup plus élevé est requis pour converger la simulation TSM que la simulation stationnaire avec le modèle $k - \omega$ SST. Ainsi, la fréquence du phénomène affecte le taux de convergence de la simulation, ce qui est en partie dû à la formulation du nombre de CFL (eq. 3.43). Finalement, le plateau de convergence du modèle de Spalart-Allmaras est maintenant de -2 ce qui indique un effet plus important du limiteur appliqué au modèle de turbulence de Spalart-Allmaras pour le schéma TSM.

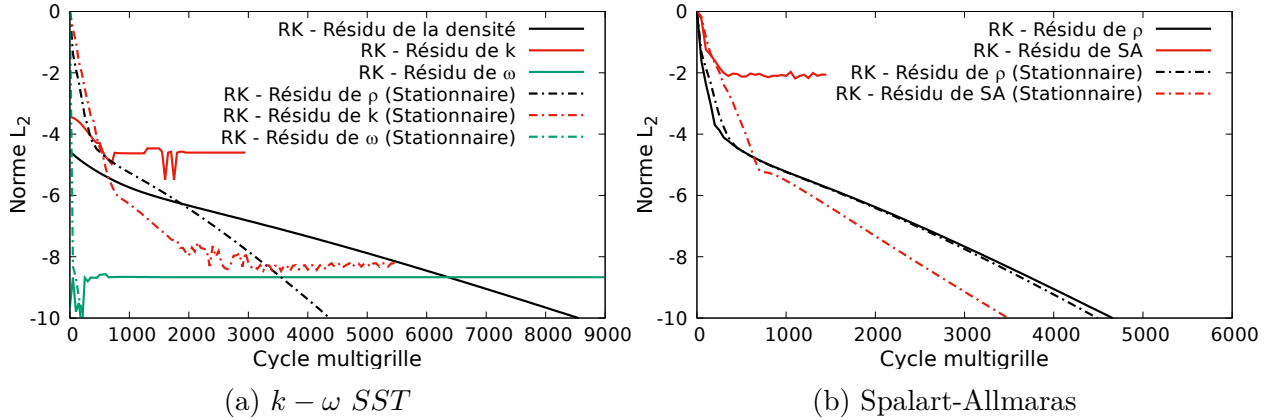


Figure 3.31 Convergence itérative pour le profil NACA0015 avec $k_c = 0.19$

La figure 3.32(a) montre l'évolution temporelle de k , en noir, et de ω , en rouge, pour une cellule dans le sillage. La dérivée de ces quantités est montrée à la figure 3.32(b). La couleur des axes est associée à chacune des variables pour simplifier l'affichage. On observe que la solution TSM avec 10 modes (cercle plein) reproduit fidèlement la solution DTS, alors qu'un faible écart est présent avec 5 modes (cercle vide). Ce résultat indique que la méthode TSM permet de bien résoudre ce modèle de turbulence.

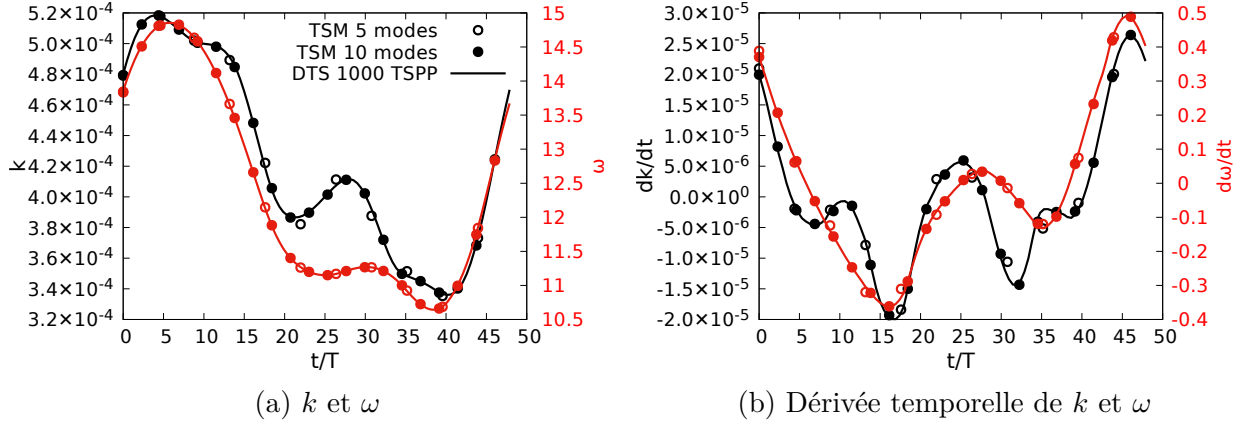


Figure 3.32 Évolution temporelle de k et ω pour le profil NACA0015 avec $k_c = 0.19$

La même analyse de temps de calcul que celle menée à la section 3.3.2 est réalisée. On considère ici l'utilisation du modèle de turbulence $k - \omega$ SST et on impose une convergence de la norme L_2 du résidu de la densité de 2 ordres de grandeur pour chacun des pas de temps en DTS. La figure 3.33 montre l'étude de convergence en pas de temps pour la méthode DTS. On observe à la figure 3.33(b) qu'un pas de temps grossier (25 pas de temps par période) peut être utilisé, sans effet sur les coefficients de portance et de traînée. Néanmoins, afin de s'assurer que les effets transitoires sont éliminés, au moins cinq cycles d'oscillation doivent être simulés. Ainsi, on observe à la figure 3.33(a) que la simulation la plus efficace est celle avec 50 pas de temps par période. Au minimum 25 000 cycles multigrilles sont donc requis.

Pour la méthode TSM, 3 modes (7 instances de temps) sont requis pour obtenir une solution adéquate du coefficient de traînée. Avec le modèle de turbulence de $k - \omega$ SST, 2000 cycles multigrilles sont requis pour converger la norme L_2 du résidu de la densité de 6 ordres de grandeur. Avec une pénalité de 20% pour les coûts de calcul dus à la méthode TSM, on doit réaliser l'équivalent 16 800 cycles multigrilles.

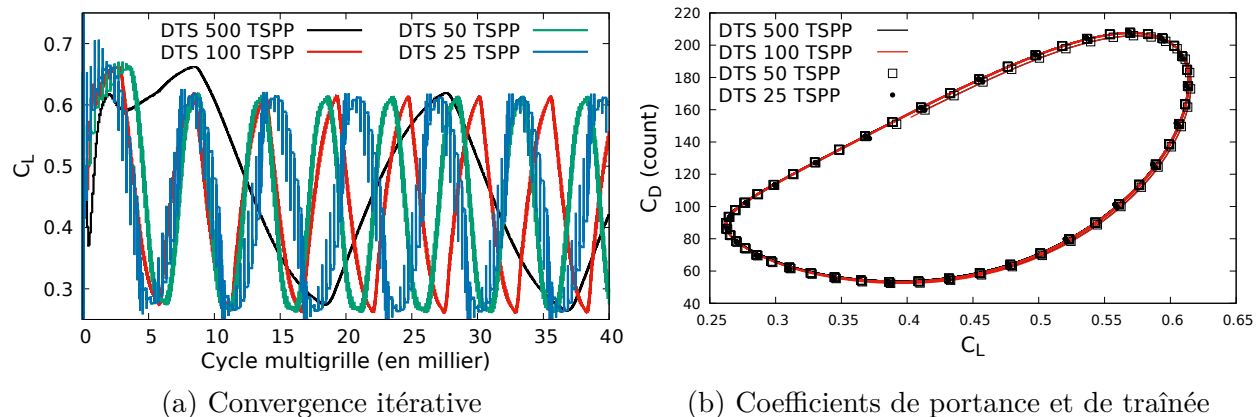


Figure 3.33 Effet du pas de temps en DTS pour le profil NACA0015 avec $k_c = 0.19$

On peut aussi monitorer la convergence de la solution TSM par la convergence des coefficients de portance et de traînée. La figure 3.34 montre que les coefficients de force sont pratiquement constants à partir de 1000 cycles multigrilles (MGC). Pour une application d'ingénierie, un critère d'arrêt sur la convergence en C_L et/ou C_D permettrait d'obtenir une solution au coût de 8 400 cycles multigrilles et on pourrait même abaisser le nombre de modes à 2, comme le montre la figure 3.29. La méthode TSM est donc de 2 à 4 fois plus rapide pour ce cas.

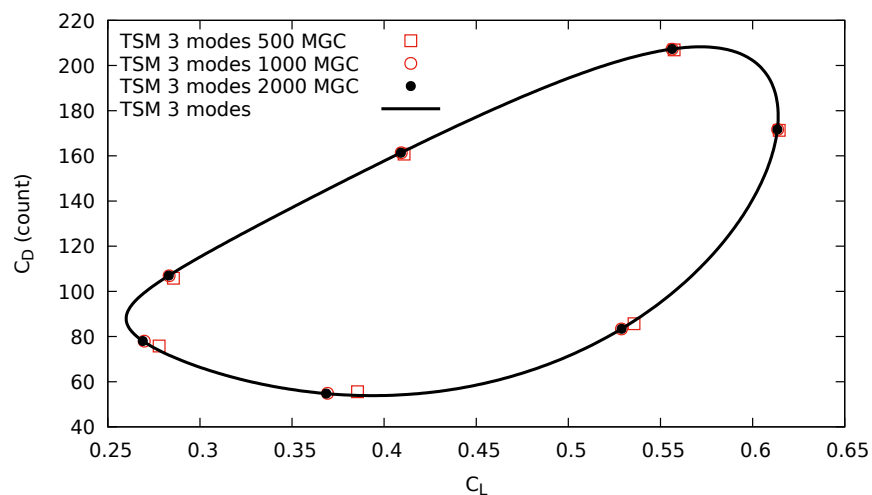


Figure 3.34 Convergence itérative des coefficients de portance et de traînée de la méthode TSM pour le profil NACA0015 avec $k_c = 0.19$

Cas test : Profil NACA0012 en tangage transsonique

Le cas test AGARD 5, présenté la section 3.3.2, est maintenant utilisé pour tester l'algorithme *Time Spectral* dans le cas d'un écoulement transsonique turbulent. Il s'agit d'un profil NACA0012 oscillant en tangage avec une amplitude de 2.51° autour de 0.016° à une fréquence réduite $k_c = f\pi c/U_\infty = 0.0814$. L'écoulement incident est à un nombre de Mach de 0.755 et un nombre de Reynolds de 5.5 millions. Le modèle de turbulence de Spalart-Allmaras est utilisé.

Les figures 3.35(a) et (b) montrent les convergences de la densité et de la variable $\tilde{\nu}$ respectivement. Plusieurs nombres de modes sont montrés avec et sans le terme *Temporal Spectral Viscosity*, soit l'opérateur D_2 de l'équation 3.38. De façon similaire aux cas tests précédents, le nombre de modes affecte peu le taux de convergence de la simulation. Néanmoins, on observe que pour les simulations sans le terme TSV de Huang et Ekici (2014), soit les traits hachurés, le modèle de turbulence ne converge pas pour 18 et 25 modes. Aussi, bien que la simulation 18 modes converge de 8 ordres de grandeur pour le résidu de la densité, celle à 25 modes échoue à converger à plus de 3 ordres. Or, la figure 3.36 montre qu'un nombre de modes élevé est requis pour bien calculer les coefficients de traînée.

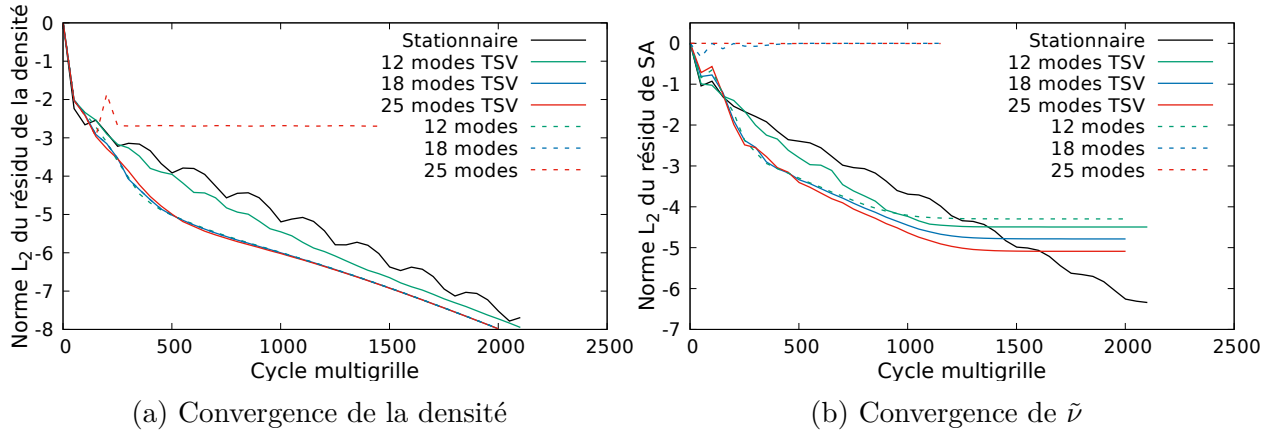


Figure 3.35 Convergence du cas AGARD 5 turbulent

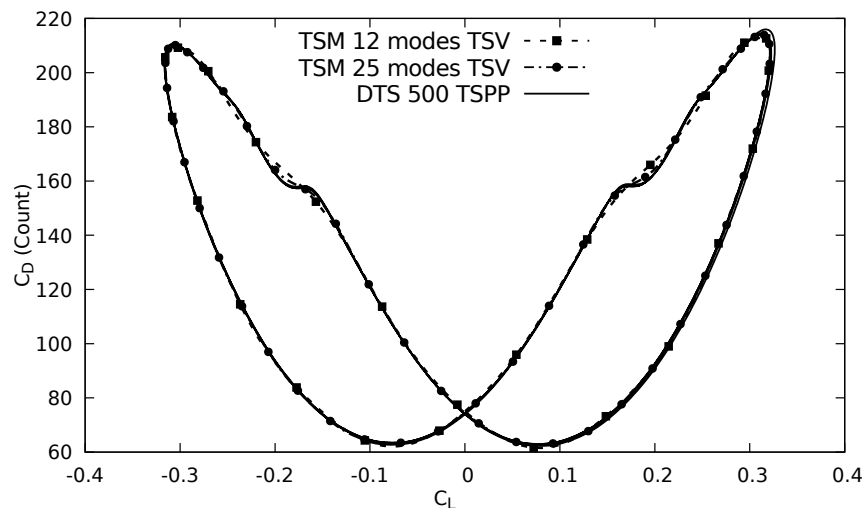
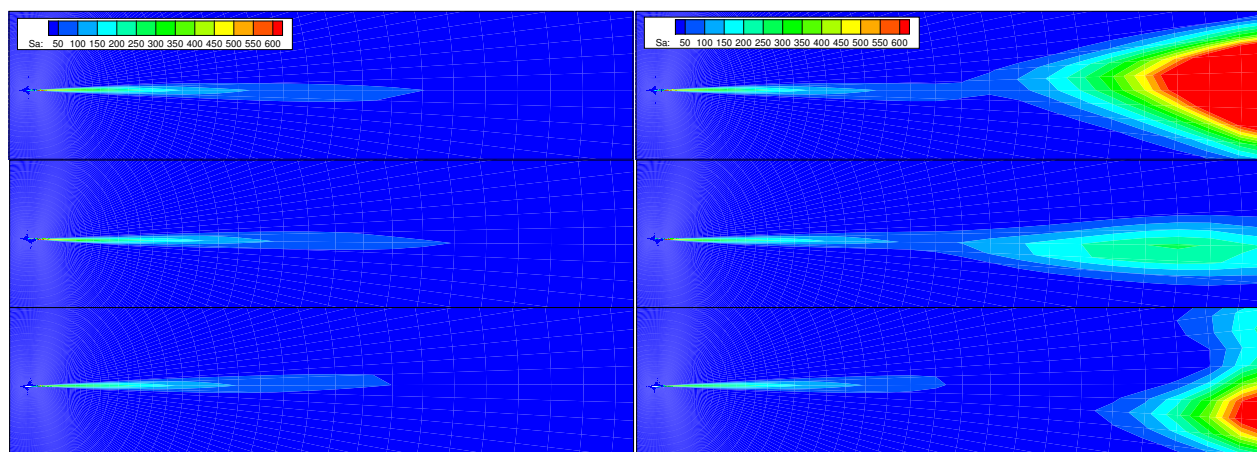


Figure 3.36 Convergence modale des coefficients de portance et de traînée du cas AGARD 5 turbulent

Ce problème de convergence du modèle de Spalart-Allmaras est illustré à la figure 3.37, où les contours de $\tilde{\nu}$ sont montrés pour 12 et 18 modes. Pour 12 modes, le champ de $\tilde{\nu}$ correspond à ce qui est normalement observé pour une simulation Spalart-Allmaras. Cependant, pour 18 modes une région de $\tilde{\nu}$ élevé est présente dans le sillage. Dans le cas à 25 modes, des valeurs aberrantes de $\tilde{\nu}$ sont observées dans tout le domaine. Ce résultat montre que la simulation 18 modes est à la limite entre une solution stable et instable du système d'équations, où les erreurs du modèle de turbulence affectent peu la convergence du solveur Navier-Stokes.

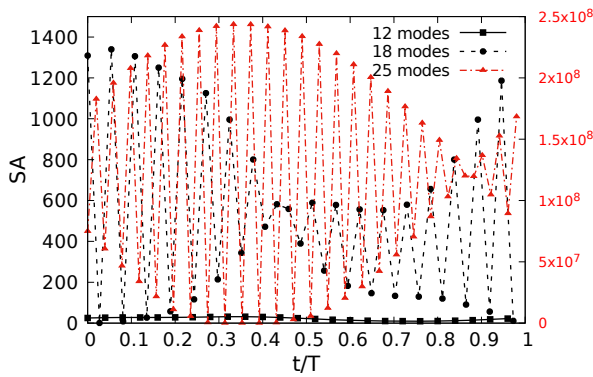
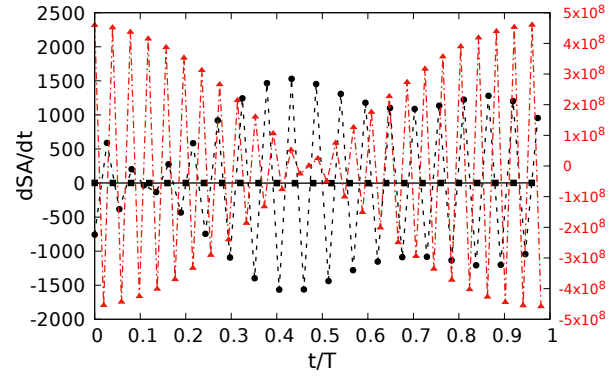
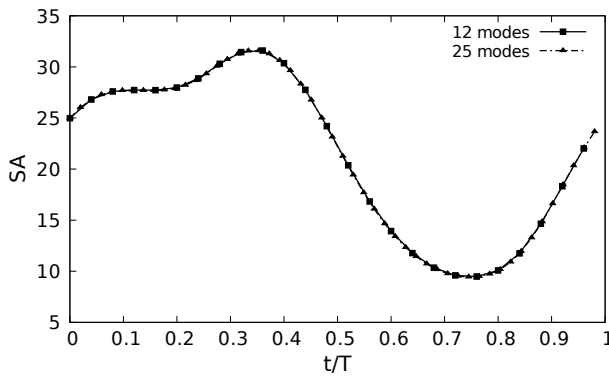
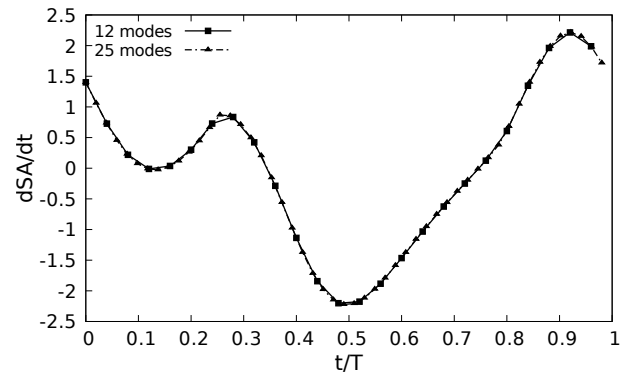


(a) 12 modes (Temps 1, 8, 16)

(b) 18 modes (Temps 1, 12, 24)

Figure 3.37 Contours de $\tilde{\nu}$ pour le cas AGARD 5 turbulent

Ce problème de convergence est étudié plus en détail à la figure 3.38. Les figures 3.38(a) et (b) montrent respectivement l'évolution temporelle de $\tilde{\nu}$ et de sa dérivée temporelle pour une cellule située dans le sillage près de la limite champ lointain. On observe de faibles valeurs pour le cas à 12 modes avec une oscillation à la fréquence d'oscillation du profil, ce qui est un résultat attendu. Cependant, pour les cas à 12 et 18 modes, l'oscillation se produit à la dernière harmonique avec une amplitude beaucoup plus élevée. La simulation à 25 modes est d'ailleurs affichée avec l'échelle rouge puisque les valeurs sont trop élevées. Lorsque la méthode TSV est employée avec comme paramètre une coupure au 12^e mode et un gain de $1/N$, la convergence du modèle de turbulence et du système d'équations de Navier-Stokes est retrouvée. Aussi, les figures 3.38(c) et (d) montrent que la solution du modèle de turbulence devient indépendante du nombre de modes. La méthode TSV a donc permis de régler le problème de stabilité.

(a) $\tilde{\nu}$ sans TSV(b) $\frac{\partial \tilde{\nu}}{\partial t}$ sans TSV(c) $\tilde{\nu}$ avec TSV(d) $\frac{\partial \tilde{\nu}}{\partial t}$ avec TSVFigure 3.38 Évolution temporelle de $\tilde{\nu}$ pour le cas AGARD 5 turbulent

Les trois cas tests utilisés montrent que la méthode TSM peut être utilisée pour le calcul de phénomènes turbulents avec les équations URANS. Cependant, le phénomène de Gibbs peut être observé lors de la résolution du modèle de turbulence. Celui-ci peut limiter la convergence en résidu, mais affecte peu la solution puisqu'il survient en bordure du sillage où la viscosité turbulente est faible. De plus, la méthode *Time Spectral* permet de réduire considérablement le coût du calcul par rapport à la méthode *Dual Time Stepping*. Finalement, pour le cas AGARD 5, qui nécessite l'utilisation d'un nombre élevé de modes, la méthode TSM peut être instable. Ce problème de stabilité est résolu en ajoutant un terme de dissipation artificielle.

CHAPITRE 4 RÉSULTATS NUMÉRIQUES

Cette section présente des cas d’application et de validation du solveur NSCODE pour l’étude de phénomènes aérodynamiques instationnaires. Dans un premier temps, les fréquences obtenues selon le nombre de Reynolds pour le cas du cylindre laminaire sont comparées à des résultats expérimentaux. Le cas du profil NACA0015 en décrochage dynamique est étudié pour tester les limites de la méthode TSM. Ensuite, un cas employant un maillage chimère est présenté. Il s’agit du cas de l’oscillation d’un aileron. Ce cas permet de montrer l’équivalence des solutions TSM et DTS sur ce type de maillage. Pour finir, le tremblement transsonique sur le profil OAT15A est étudié. Ce cas test montre que le solveur TSM permet de calculer un phénomène transsonique turbulent de fréquence non imposée.

4.1 Cylindre laminaire

Les résultats de la section 3.3.4 montrent des lâchers tourbillonnaires à un nombre de Strouhal de 0.204 pour un nombre de Reynolds de 180. Cependant, l’étude menée par Gopinath et Jameson (2006) montre un nombre de Strouhal de 0.1866 avec une méthode *Time Spectral* et Mosahebi et Nadarajah (2013) obtiennent un nombre de Strouhal d’environ 0.19 avec la méthode NLFD. Ainsi, un maillage plus fin est maintenant considéré. Un maillage s’étendant à 50 diamètres de distance du cylindre, avec un espacement à la paroi de 1×10^{-3} et contenant 256×128 cellules est employé. Suivant l’étude de convergence en nombre de modes effectuée précédemment, 15 instances de temps par période sont utilisées. On obtient alors, avec la méthode TSM-GBVTP, un nombre de Strouhal de 0.1935.

En utilisant ces paramètres numériques, un balayage des nombres de Reynolds de 60 à 180 est effectué. La période initiale de l’algorithme GBVTP est ajustée afin de commencer le calcul plus près de la période finale. Les nombres de Strouhal initiaux et finaux sont présentés au tableau 4.1. On observe que dans tous les cas le nombre de Strouhal final est différent de l’hypothèse initiale. Le solveur de la fréquence modifie donc celle-ci afin de permettre au solveur de converger. La figure 4.1 compare les nombres de Strouhal finaux aux résultats expérimentaux de Williamson (1988). On observe que les fréquences obtenues concordent avec les résultats expérimentaux, ce qui valide le schéma *Time Spectral*.

Tableau 4.1 – Effet du nombre de Reynolds sur les lâchers tourbillonnaires d’un cylindre laminaire

Re	St_0	St_f
60	0.15	0.1356
80	0.175	0.1534
100	0.175	0.1658
120	0.2	0.1752
140	0.2	0.1826
160	0.2	0.1866
180	0.2	0.1935

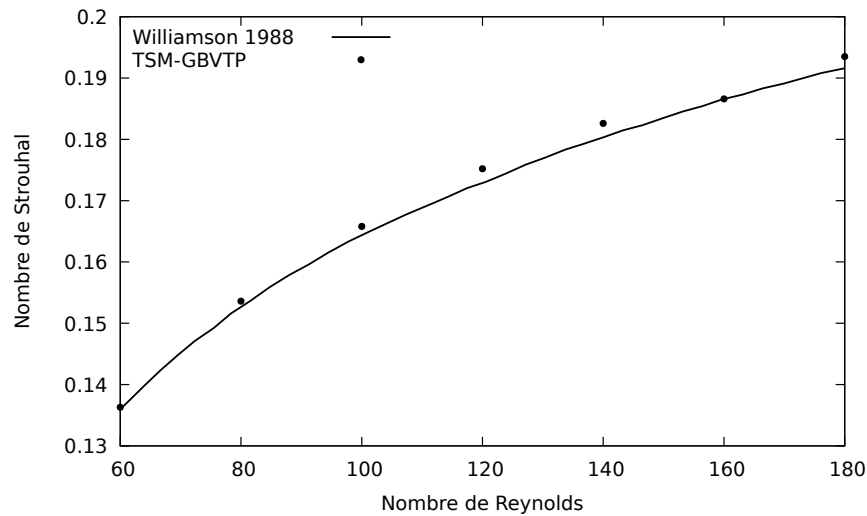


Figure 4.1 Nombre de Strouhal selon le nombre de Reynolds pour le cylindre laminaire

4.2 Décrochage dynamique

Les schémas DTS et TSM sont comparés pour la solution de décrochage dynamique. Ce phénomène survient lorsque le mouvement d’un profil ou d’une aile cause le décrochage. Des cas étudiés par Piziali (1994) sont considérés. Il s’agit d’une extension des cas tests de la section 3.3.5, où un profil NACA0015 à Reynolds 2 millions et Mach 0.289 est étudié. Ici, on considère une série de mouvements $\alpha = \alpha_0 + \alpha_1 \sin(\omega t)$ détaillée au tableau 4.2. Les cas à faible angle d’attaque moyen ne subissent pas de décrochage dynamique, alors que ce phénomène apparaîtra progressivement avec l’augmentation de l’angle d’attaque moyen.

La figure 4.2 montre la courbe $C_L - \alpha$ du profil NACA0015 stationnaire aux conditions d'écoulement décrites précédemment. Les modèles de turbulence de Spalart-Allmaras et $k-\omega SST$ sont utilisés. On observe que le décrochage survient à un angle d'attaque plus faible pour le modèle $k-\omega SST$. Il est aussi à noter que ce modèle converge difficilement pour les angles d'attaques supérieurs à 14° .

Par la suite, les simulations en décrochage dynamique sont exécutées avec les deux modèles de turbulence. Les courbes de coefficient de portance selon l'angle d'attaque sont présentées aux figures 4.3 (a) et (b) pour les modèles de turbulence de Spalart-Allmaras et $k-\omega SST$ respectivement. Pour simplifier l'affichage, l'abscisse est centrée sur l'angle d'incidence moyen. On observe que les solutions *Time Spectral* avec 5 modes sont en bon accord avec les solutions DTS, montrées en traits hachurés, pour les cas 1 et 2. Pour ces deux cas, l'angle d'attaque demeure inférieur à l'angle de décrochage statique.

Pour le cas 3, l'angle d'incidence géométrique maximal est de 15.02° et le profil dépasse l'angle de décrochage statique pour le modèle $k-\omega SST$. Ainsi, on observe que ce modèle échoue à prédire la portion à angle d'attaque élevé du cycle. De plus, de façon analogue aux cas stationnaires à incidence élevée, des problèmes de convergence sont observés. Pour le modèle de Spalart-Allmaras, une solution équivalente à celle de la méthode DTS est obtenue pour le cas 3, où le profil est décroché dans la portion à angle d'attaque élevé du cycle. Finalement, le coefficient de portance est surévalué dans la portion en décrochage du cycle pour le cas 4, mais la portion où le coefficient de portance est maximal est bien calculée. Dans ces conditions, l'angle d'attaque dépasse l'angle de décrochage statique et le profil est décroché pour une bonne partie du cycle d'oscillation.

Ainsi, la méthode TSM permet de calculer des cas de décrochage dynamique et d'obtenir des solutions équivalentes à la méthode DTS. Cependant, des différences peuvent être observées pour les cas fortement décrochés.

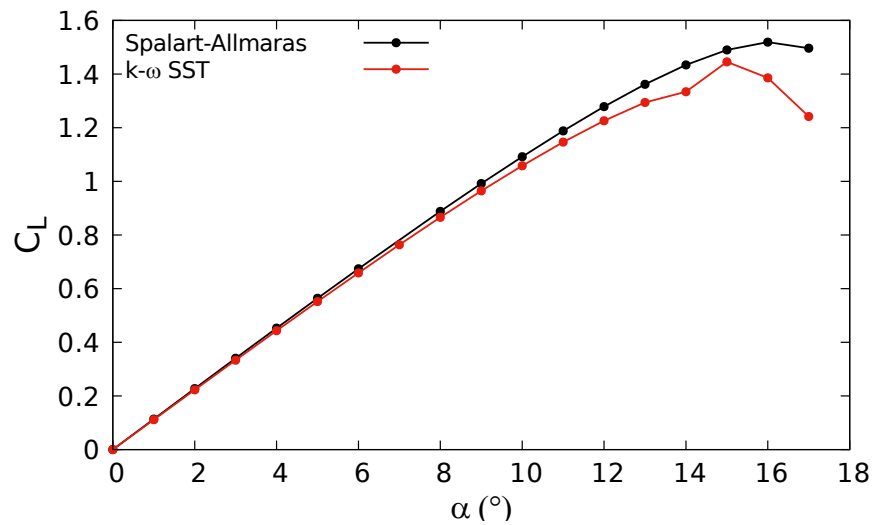


Figure 4.2 Coefficient de portance stationnaire du profil NACA0015

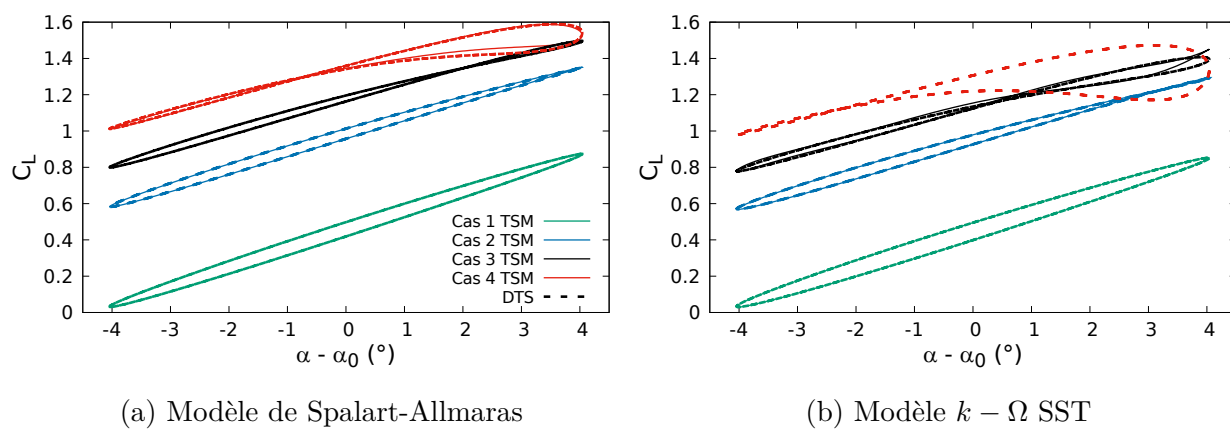


Figure 4.3 Coefficient de portance en décrochage dynamique pour le profil NACA0015 selon l'angle relatif à l'incidence moyenne

Tableau 4.2 – Cas tests de décrochage dynamique

Cas	k_c	$\alpha_0(^{\circ})$	$\alpha_1(^{\circ})$	$\alpha_{max} (^{\circ})$
1	0.038	4.06	4.04	8.10
2	0.038	8.97	4.04	13.01
3	0.038	10.98	4.04	15.02
4	0.038	13.06	4.04	17.10

4.3 Aileron oscillant

Un cas d'application avec maillage chimère est maintenant considéré. Il s'agit d'un profil NACA0012 divisé en un élément principal et un aileron, avec un espacement de 0.01 corde. L'aileron oscille autour de 0.75 corde et l'élément principal est fixe. Les conditions à l'infini sont un nombre de Mach de 0.4, un nombre de Reynolds de 1.63 million et un angle d'incidence de 4° . Le mouvement de l'aileron est imposé à une fréquence réduite de $k_c = 0.132$ et les amplitudes d'oscillation sont de 3° , 6° , 10° et 20° . Un maillage composé de l'assemblage de deux maillages en O de 256×128 cellules pour l'aileron et l'élément principal avec un espacement à la paroi de 1×10^{-6} corde est utilisé. Un second maillage, plus grossier, est obtenu en conservant un point sur deux dans les deux maillages. Ce maillage conserve un espacement à la paroi acceptable. L'assemblage des deux maillages est montré à la figure 4.4. La portion du domaine calculée depuis le maillage de l'aileron est illustrée en rouge et celle de l'élément principal en noir.

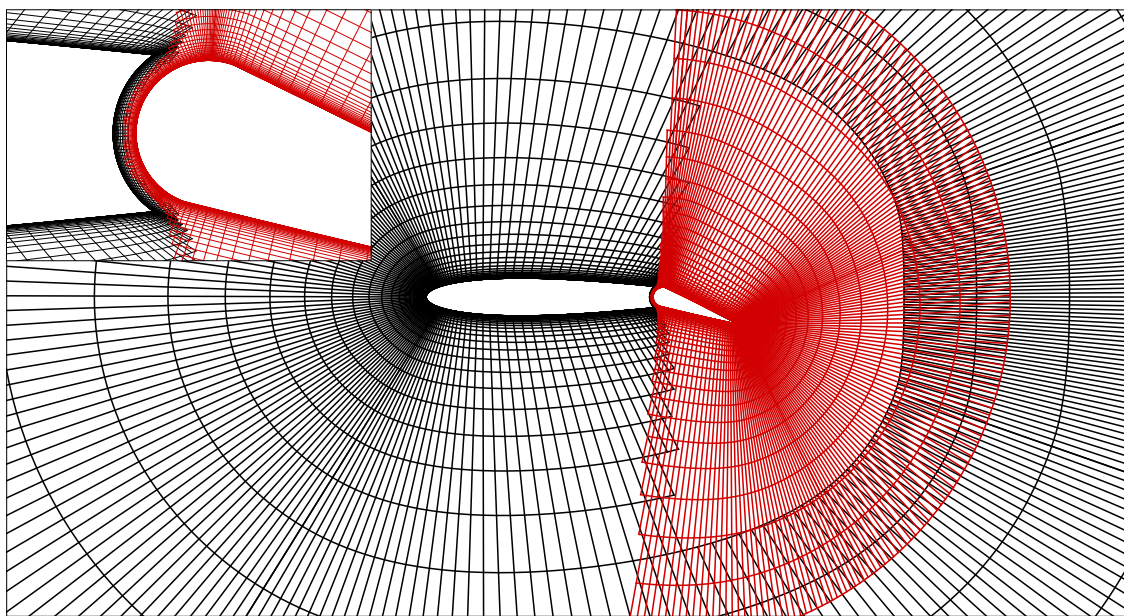


Figure 4.4 Assemblage du maillage chimère pour le cas de l'aileron oscillant avec une déflexion de 20°

Les figures 4.5 (a) et (b) montrent la convergence en nombre de modes sur le maillage grossier pour les amplitudes de 3° et 20° respectivement. Ces résultats montrent que 3 modes sont suffisants pour obtenir des coefficients de portance et de traînée indépendants du nombre de modes pour le cas à faible amplitude. Cependant, 7 modes sont insuffisants pour obtenir une solution pleinement convergée pour le cas à 20° d'amplitude. Cependant, en raison de

la faible variation entre la solution 5 modes et 7 modes, 5 modes permettent d'obtenir une solution acceptable avec un faible coût de calcul.

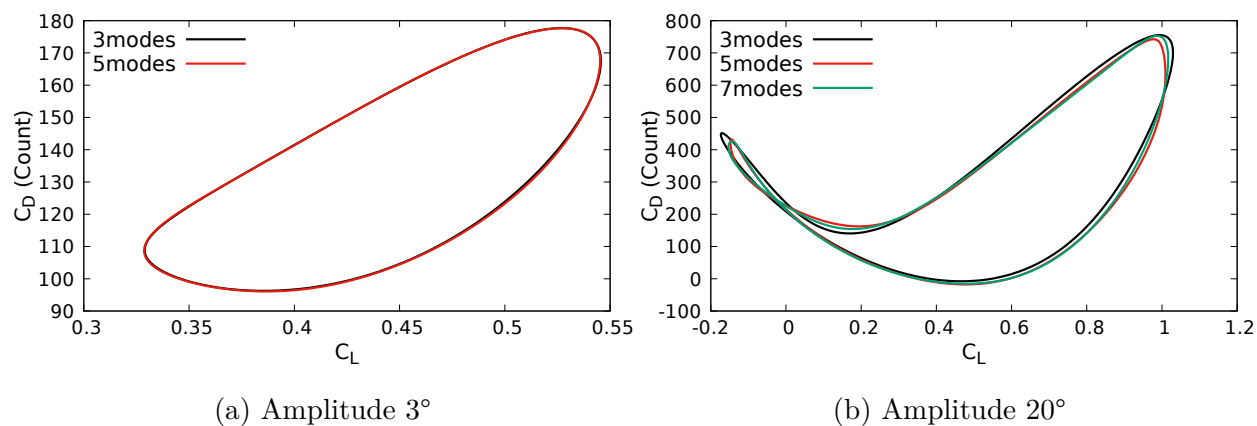


Figure 4.5 Convergence modale sur le maillage grossier pour les cas d'ailerons oscillants

La figure 4.6 compare les solutions obtenues en utilisant les deux maillages. Cette figure montre aussi que la solution *Time Spectral* reproduit bien la solution *Dual Time Stepping*, même pour un cas complexe comme celui de l'aileron oscillant. On observe que la convergence en maillage n'est pas tout à fait obtenue pour ce cas. Néanmoins, le maillage grossier permet d'obtenir une solution proche de celle du maillage fin.

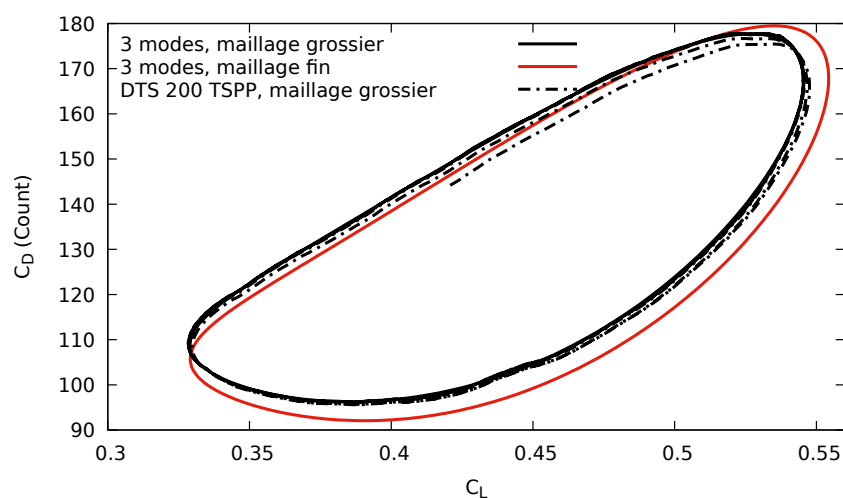


Figure 4.6 Effet du maillage pour le cas de l'aileron oscillant avec une amplitude de 3°

En employant 5 modes et le maillage grossier, les solutions des 4 amplitudes d'oscillation sont montrées à la figure 4.7. On observe que les cycles ne sont pas symétriques à cause de l'angle d'attaque moyen non nul du profil et que l'amplitude de variation en C_L et C_D augmente avec l'amplitude d'oscillation de l'aileron. Pour les trois amplitudes les plus faibles, on observe une solution équivalente entre les schémas DTS et TSM. La simulation DTS avec une amplitude de 20° s'est avérée difficile à converger et n'est donc pas montrée. Finalement, la figure 4.8 montre les contours de nombre de Mach pour l'amplitude de 20° . On observe la présence de zones de recirculation à l'arrière de l'aileron. Cette figure montre aussi que la solution est continue à l'interface entre les maillages.

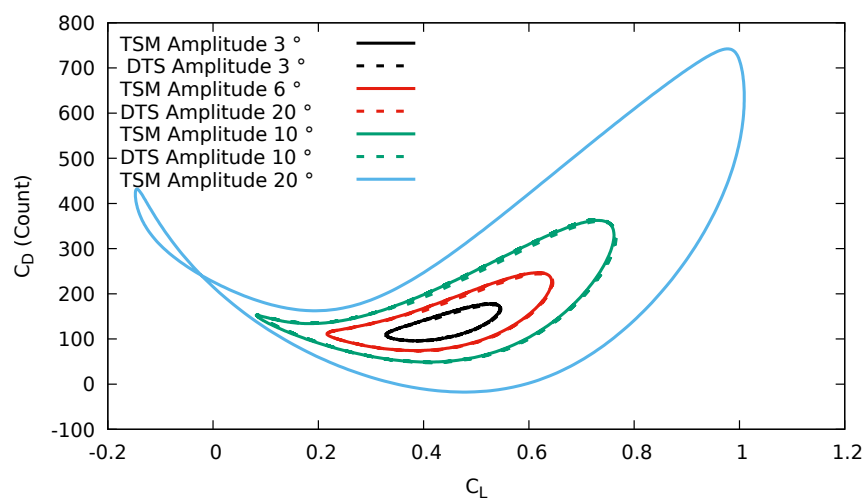


Figure 4.7 Coefficients de portance et de traînée pour les cas d'aileron oscillant

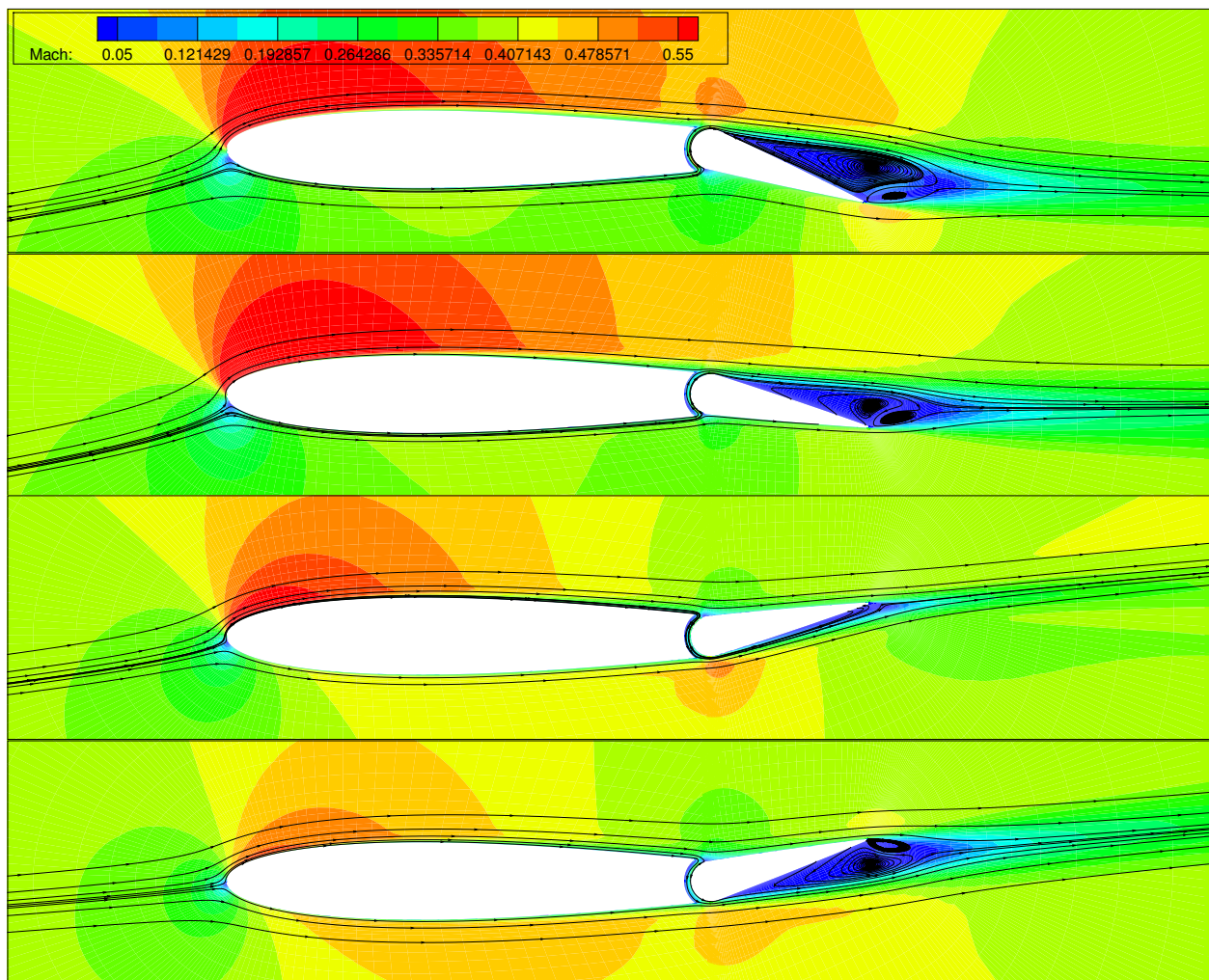


Figure 4.8 Contours de nombre de Mach et lignes de courant aux instants 3, 6, 9 et 12 sur 15 pour l'aileron oscillant à 20° d'amplitude

Ainsi, la méthode TSM peut être utilisée pour des calculs avec un maillage chimère. Il est à noter que pour ces cas tests, aucun point n'est dynamiquement masqué/calculé, ce qui évite la principale limitation des méthodes fréquentielles pour les maillages chimères.

4.4 Tremblement transsonique

Un cas de tremblement transsonique fréquemment étudié est celui du profil OAT15A. Pour ce profil, l'étude expérimentale (Jacquin *et al.* (2009)) montre que le phénomène de tremblement survient à un angle d'attaque autour de 3° et que le phénomène est bien établi à 3.5° . Cette étude est menée à un nombre de Mach de 0.73 et un nombre de Reynolds de 3 millions. Le même cas a été étudié par de nombreux auteurs et est employé en condition

stationnaire à la section 3.2. Un angle d'attaque de 3.5° est considéré dans cette section. On utilise un maillage en O de 512 par 256 cellules avec un espacement à la paroi de 2×10^{-6} corde.

4.4.1 Effet du modèle de turbulence

L'étude du tremblement transsonique par Grossi *et al.* (2014) montre un effet marqué de la modélisation de la turbulence sur la prédiction du tremblement transsonique. Il est montré que, dans les conditions nominales ($\alpha = 3.5^\circ$), seul le modèle de Edwards-Chandra avec la correction de compressibilité permet de capter un tremblement autoentretenu de grande amplitude. Le modèle EDW a permis d'observer un tremblement de faible amplitude et le modèle de Spalart-Allmaras avec la correction de compressibilité retourne un comportement instable. La figure 4.9, réalisée avec le logiciel NSCODE, montre des résultats similaires. Les modèles sans la correction de compressibilité tendent tous les deux vers une oscillation du coefficient de portance de faible amplitude, voire une solution stationnaire. À l'inverse, la correction de compressibilité permet d'observer un tremblement de grande amplitude. Il est à noter que les analyses de la section 3.2 ont montré une différence moins importante entre les solutions avec les modèles SA+CC et EDW+CC avec NSCODE que ce qui est observé avec NSMB. Cette observation peut expliquer la similitude entre les solutions des modèles SA+CC et EDW+CC avec NSCODE, contrairement aux résultats décrits par Grossi *et al.* (2014) pour NSMB.

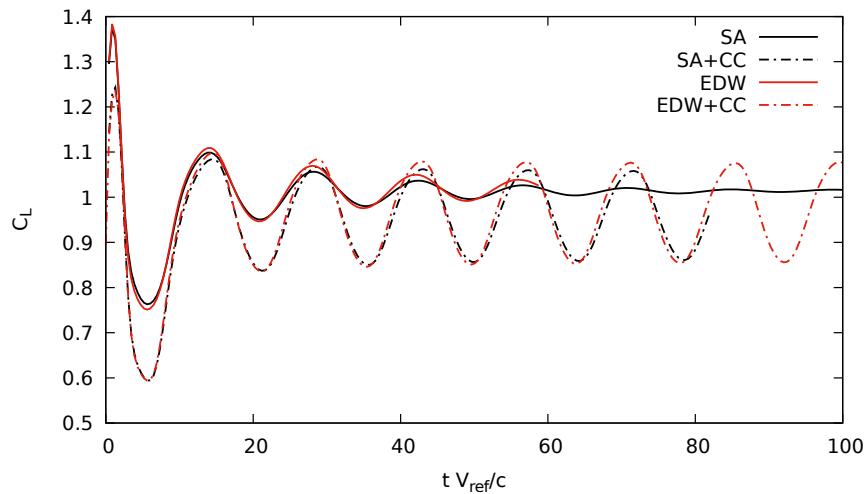


Figure 4.9 Effet de la variante du modèle de turbulence de Spalart-Allmaras sur la simulation du tremblement transsonique

4.4.2 Étude du raffinement du pas de temps

Une étude de convergence en pas de temps et en sous itérations du schéma *Dual Time Stepping* est effectuée. Trois pas de temps (0.25, 0.125 et 0.03125) et une convergence de 1, 2 et 3 ordres de grandeur par pas de temps sont étudiés. Cette convergence est mesurée par la norme L_2 du résidu de la densité et normalisée avec le résidu de la première itération du pas de temps. Les pas de temps considérés sont équivalents à 64, 128 et 514 pas de temps par période respectivement. On observe à la figure 4.10 que toutes les convergences à un ordre de grandeur par itération temporelle retournent un cycle en C_L variant avec le pas de temps et d'amplitude inférieure à celle obtenue avec des critères de convergence plus exigeants. Pour tous les cas convergés à 2 et 3 ordres de grandeur, la solution est peu affectée par le pas de temps. Ainsi, 64 pas de temps par période avec une convergence de 2 ordres sont suffisants pour ce cas.

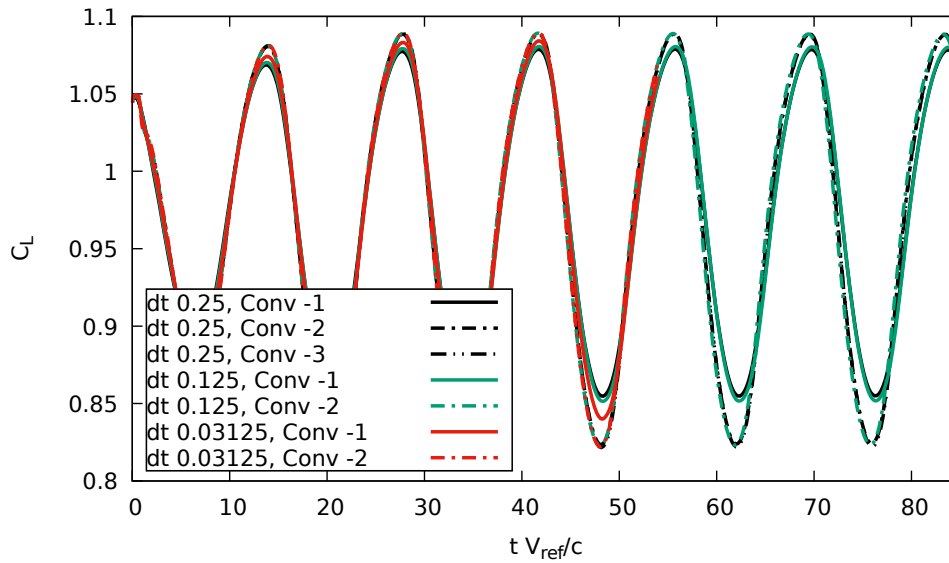


Figure 4.10 Étude de la convergence en temps pour le profil OAT15A en tremblement transsonique

La figure 4.11 montre une portion de la convergence itérative pour chacun des cas. On observe que le nombre d'itérations requis pour atteindre un niveau de convergence prescrit diminue avec la réduction du pas de temps. On observe aussi un changement du taux de convergence au cours de chacun des pas de temps. Ainsi, le nombre d'itérations requis pour atteindre 2 ou 3 ordres de convergence est plus de 2 ou 3 fois plus élevé que le nombre requis pour la convergence à 1 ordre. La figure 4.12 montre le ratio entre le temps de calcul et le

temps de simulation complété. Cette figure indique que le temps de calcul demeure plus faible en utilisant un grand pas de temps, malgré le fait que chacun des pas de temps requiert plus de sous-itérations.

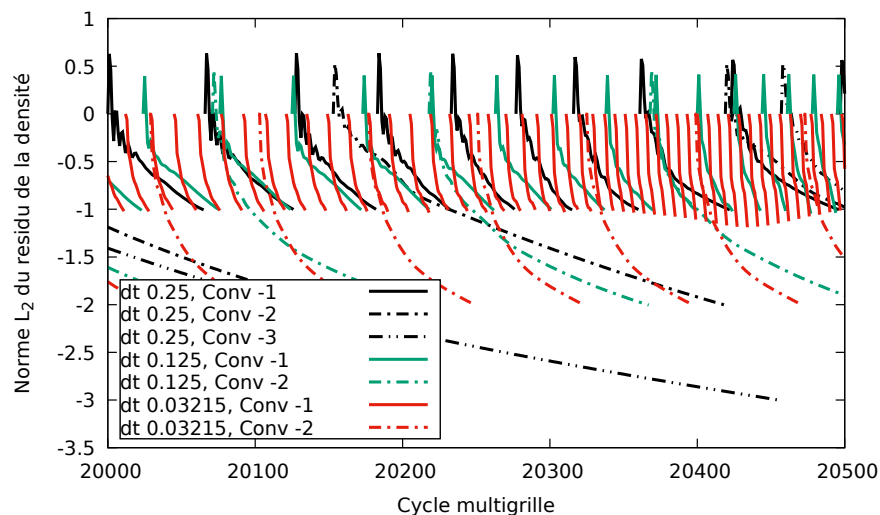


Figure 4.11 Convergence itérative des pas de temps en DTS pour le profil OAT15A en tremblement transsonique

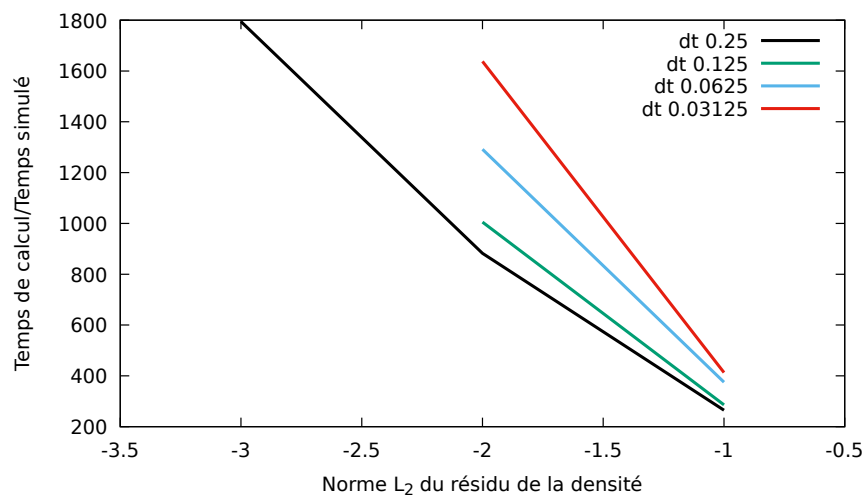


Figure 4.12 Temps de calcul pour le profil OAT15A en tremblement transsonique

4.4.3 Effet du maillage

Deux grilles plus grossières sont considérées pour le calcul du tremblement transsonique. La première, de 512 par 128 cellules, est obtenue en retirant un point sur deux dans la direction

normale à la paroi. La seconde, de 256 par 128, est obtenue en retirant un point sur deux dans les deux directions topologiques. Un quatrième maillage en C-H avec un espacement à la paroi de 1.5×10^{-6} corde d'environ 130 000 points, qui est un maillage similaire à celui de Grossi *et al.* (2014), est aussi étudié.

La figure 4.13 montre que, bien que les maillages fins en O et en C-H produisent une amplitude de tremblement similaire, un écart est présent entre leur valeur moyenne de coefficient de portance. D'autre part, l'utilisation d'un maillage plus grossier dans la direction normale (512×128) affecte peu l'amplitude du tremblement. À l'inverse, un maillage grossier le long du profil (256×128) affecte considérablement la solution. Ce résultat est probablement attribuable à la perte de résolution autour de l'onde de choc. Le maillage de 512 par 128 cellules est donc une bonne option afin de réduire le coût de calcul.

4.4.4 Analyse des résultats

Les solutions obtenues avec NSCODE sont maintenant comparées à celles obtenues par NSMB (Grossi *et al.*, 2014) avec le modèle de turbulence EDW+CC et à l'expérience de Jacquin *et al.* (2009). On observe à la figure 4.14 que la solution de NSCODE est équivalente à celle de NSMB pour le coefficient de pression moyen sur un cycle de tremblement. La figure 4.15 montre que la solution NSCODE obtenue sur le maillage en O concorde avec le maximum de l'oscillation en C_L obtenu par Grossi *et al.* (2014), alors que le maillage en C-H concorde avec le minimum. Ainsi, malgré un C_P moyen similaire, une légère différence est présente pour l'amplitude du tremblement prédit. Finalement, une fréquence de 69 Hz est rapportée par Jacquin *et al.* (2009) et de 73.2 Hz et 80.5 Hz par Grossi *et al.* (2014) en URANS et *Delayed Detached Eddy Simulation* (DDES) respectivement. La fréquence dimensionnelle obtenue par NSCODE est de 79.4 Hz .

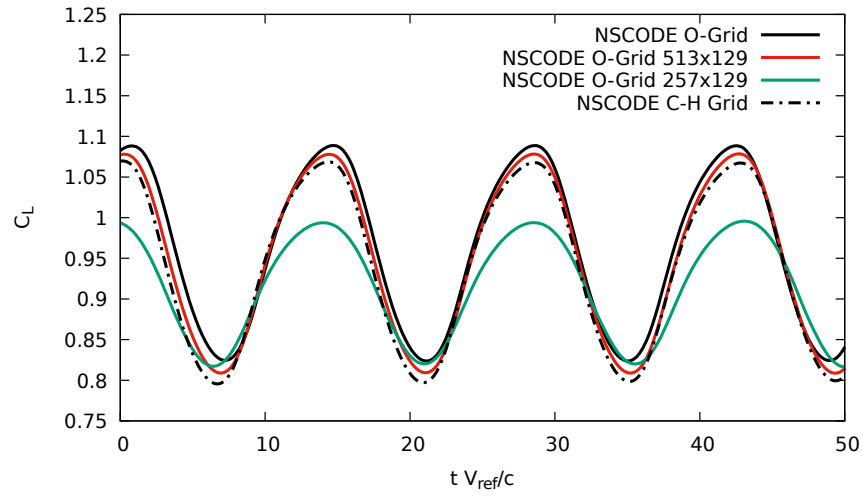


Figure 4.13 Effet du maillage sur le calcul du tremblement transsonique

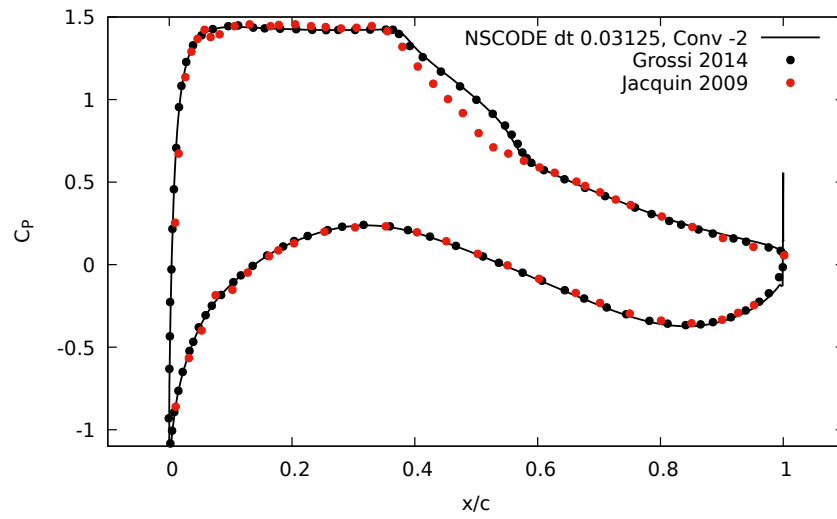


Figure 4.14 Coefficients de pression moyen pour le profil OAT15A en tremblement transsonique

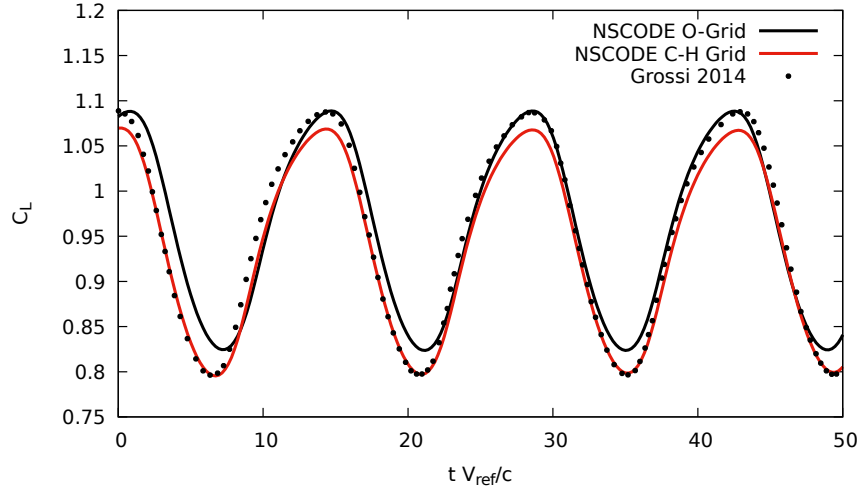


Figure 4.15 Évolution temporelle du coefficient de portance pour le profil OAT15A en tremblement transsonique

4.4.5 Calculs *Time Spectral*

La méthode *Time Spectral* avec adaptation de la période est maintenant utilisée pour la simulation du tremblement transsonique. D'une façon similaire au cas du lâcher tourbillonnaire sur le profil, une simulation stationnaire est d'abord effectuée, pour 1000 itérations, afin de placer l'écoulement. Une instationnarité est alors captée dans le solveur en pseudotemps et le solveur ne converge pas. Une perturbation entre les instances de temps est ensuite introduite pendant 500 cycles multigrilles avec une oscillation en incidence d'une amplitude de 5° . Le calcul est ensuite poursuivi avec le profil statique et l'adaptation de la période débute après 2000 cycles multigrilles. La grille de 512×128 est utilisée.

La figure 4.16 montre les convergences du nombre de Strouhal en rouge et de la densité en noir pour 4, 5, 8 et 10 modes. On observe que l'algorithme d'adaptation de la période converge vers une valeur fixe pour tous les nombres de modes considérés. La convergence en nombre de modes du nombre de Strouhal est obtenue avec un nombre de modes entre 8 et 10. On observe aussi que le résidu de la densité est au moins convergé de 7 ordres de grandeur pour toutes les simulations.

La robustesse de l'algorithme de résolution de la fréquence est testée en simulant le tremblement à partir de différentes fréquences initiales avec 4 modes. La figure 4.17 montre qu'une même valeur de nombre de Strouhal finale est obtenue pour des Strouhal initiaux dans l'in-

tervalle $0.0681 \leq St_0 \leq 0.0747$. Une convergence avec l'algorithme basé sur le déphasage est aussi montrée, et montre que cette méthode converge vers la même fréquence.

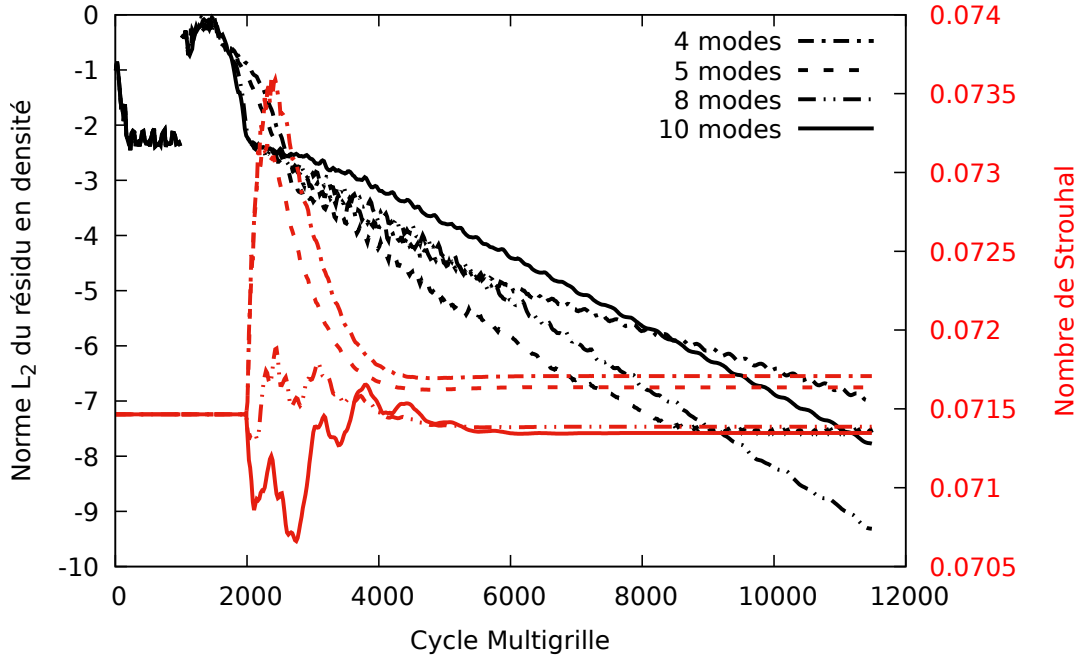


Figure 4.16 Convergence itérative de la densité et du nombre de Strouhal du tremblement transsonique calculé avec la méthode TSM

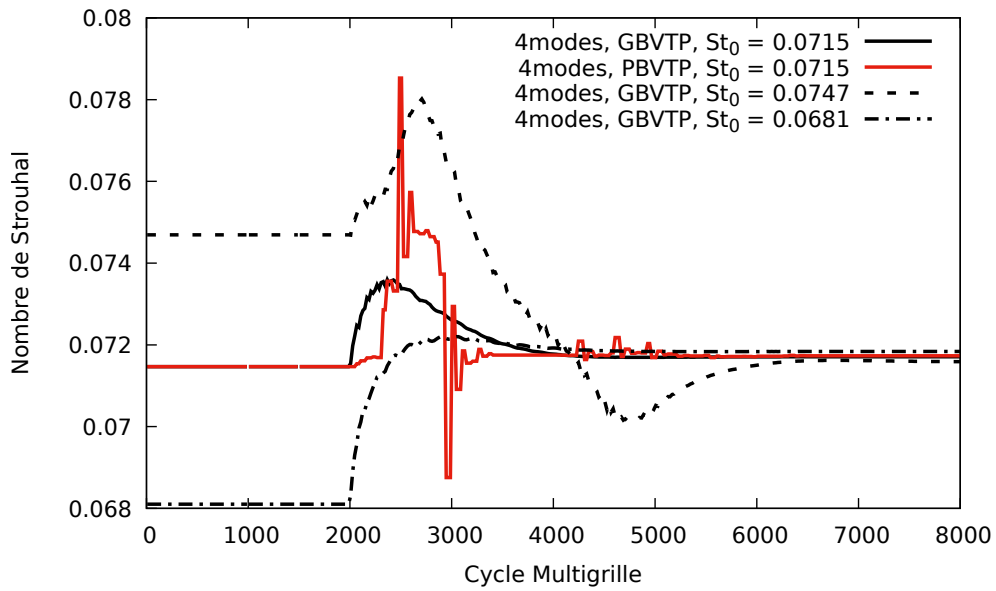


Figure 4.17 Convergence itérative du nombre de Strouhal du tremblement transsonique calculé avec la méthode TSM pour différents nombres de Strouhal initiaux

Les figures 4.18(a) et (b) montrent respectivement les coefficients de portance et de traînée obtenus avec les schémas DTS et TSM. On observe que les solutions TSM sont équivalentes à la solution DTS pour ces deux quantités. De façon similaire, la figure 4.19 montre que les coefficients de pression moyens sur un cycle de tremblement sont les mêmes pour les méthodes TSM et DTS. Finalement, le phénomène de tremblement est illustré à la figure 4.20 où les contours de nombre de Mach sont montrés. On observe ainsi le déplacement du choc transsonique le long de la corde et l'importante zone de recirculation (faible nombre de Mach) qui l'accompagne. On observe que le choc est d'abord à sa position arrière et se déplace vers le bord d'attaque. Lorsque le choc se déplace vers l'amont, sa force augmente et une zone de séparation apparaît. Par la suite l'écoulement redevient attaché et le choc se déplace vers l'aval.

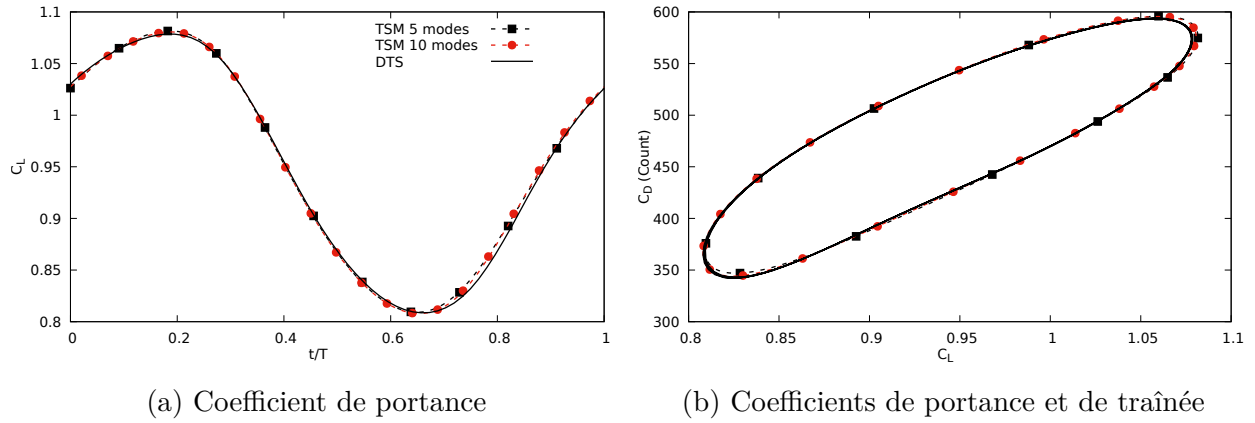


Figure 4.18 Coefficients aérodynamiques en tremblement transsonique calculés avec la méthode TSM et DTS

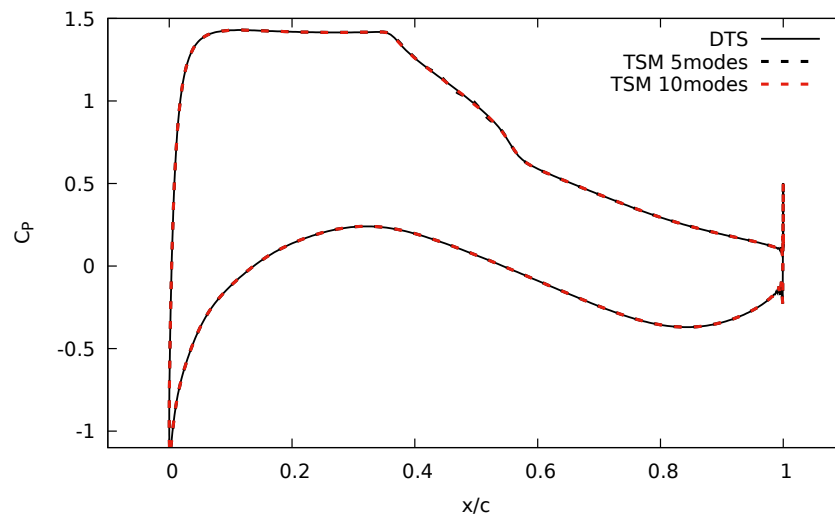


Figure 4.19 Coefficients de pression moyen pour le profil OAT15A en tremblement transsonique calculés avec la méthode TSM

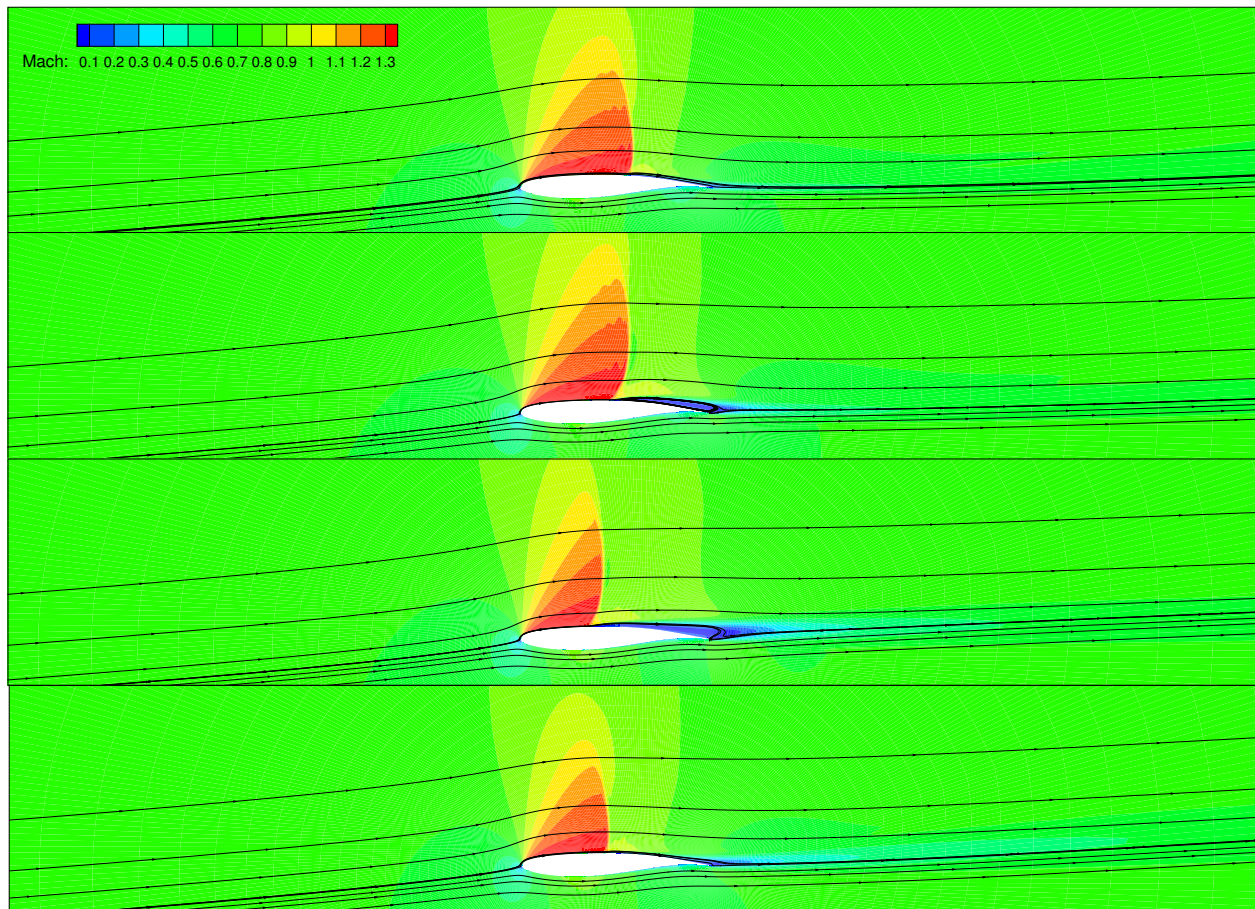


Figure 4.20 Contours de nombre de Mach et lignes de courant aux instants 1, 5, 10 et 15 sur 21 du tremblement transsonique

Ainsi, le modèle de turbulence a une grande importance sur la simulation du tremblement transsonique. Pour ces simulations, un grand pas de temps peut être utilisé, mais chacun des pas de temps doit être convergé d'au moins 2 ordres de grandeur. L'étude du raffinement en maillage indique que le nombre de points sur le pourtour du profil a un grand effet sur la solution du tremblement, ce qui est attendu pour conserver une résolution acceptable du choc. Finalement, les solutions *Time Spectral* avec l'adaptation de la période montrent qu'une méthode fréquentielle peut être utilisée pour simuler le tremblement transsonique.

CHAPITRE 5 CONCLUSION

5.1 Synthèse des travaux

Ce mémoire a présenté le développement d'un solveur basé sur une discrétisation en série de Fourier pour la résolution des équations URANS. Cette méthode permet d'obtenir la même précision que les calculs instationnaires classiques tout en ayant le potentiel d'être significativement plus rapide que ces derniers. Ces travaux sont orientés vers la résolution de phénomènes autoentretenus, où la fréquence est à priori inconnue, comme le tremblement transsonique. Deux axes majeurs de développement ont été suivis, soit l'utilisation de modèles de turbulence et la résolution de la fréquence comme une inconnue supplémentaire du problème. Ces implémentations ont été réalisées avec un solveur *Time Spectral* qui s'avère équivalent au solveur NLFD précédemment implémenté dans le logiciel NSCODE. Cependant, un gain de performance est obtenu en utilisant la méthode Time Spectral avec une librairie FFT au lieu de la méthode NLFD. Un solveur implicite LU-SGS permet aussi d'augmenter le taux de convergence du solveur.

Pour la résolution de la fréquence, deux méthodes présentées dans la littérature ont été implémentées, soit une méthode basée sur le gradient du résidu et une méthode basée sur le déphasage de la solution. Ces deux méthodes sont efficaces pour les cas tests sélectionnés. La validation de l'adaptation de la période a été réalisée pour le cas du lâcher laminaire d'un cylindre en comparant la fréquence obtenue à des résultats expérimentaux.

Deux modèles de turbulence, présents dans le solveur NSCODE de base, ont été adaptés pour une application dans un solveur pseudo-spectral, soit le modèle Spalart-Allmaras et le modèle Menter $k - \omega$ SST. La précision atteinte avec l'emploi de ces deux modèles a été vérifiée par une comparaison avec le solveur *Dual Time Stepping*, une méthode fréquemment employée pour le calcul des écoulements instationnaires. Néanmoins, la présence du phénomène de Gibbs a été observée lors de la résolution des modèles de turbulence avec la méthode *Time Spectral*. Bien que ce phénomène nuit à la convergence du schéma, il affecte peu la solution pour les cas considérés. Une instabilité se produisant lorsqu'un nombre élevé de modes est utilisé est aussi rapportée. Cette problématique est résolue par l'utilisation d'un terme de dissipation qui permet de maintenir la stabilité, sans affecter la précision de la méthode.

Des cas complexes ont ensuite été considérés. Un cas de décrochage dynamique a été étudié. Ce cas test montre que la méthode *Time Spectral* produit des solutions équivalentes à la méthode *Dual Time Stepping*, en l'absence de décrochage majeur. Aussi, le cas d'un aileron oscillant est calculé avec la technique de maillage chimère ce qui démontre la flexibilité de la méthode proposée.

Finalement, une étude de la simulation du tremblement transsonique avec la méthode *Dual Time Stepping* est effectuée afin de montrer l'effet de la modélisation de la turbulence, de la résolution temporelle et du maillage. Des solutions concordant avec des résultats numériques et expérimentaux de la littérature ont été obtenues. La méthode *Time Spectral* avec adaptation de la période a ensuite été appliquée à la simulation du tremblement transsonique avec succès. Des résultats équivalents aux solutions *Dual Time Stepping* sont obtenus pour les coefficients de portance et de traînée ainsi que les coefficients de pression moyens.

Une comparaison entre le temps de calcul de la méthode DTS et TSM a été réalisée en prenant comme unité de référence le temps pour effectuer un cycle multigrille. Cette analyse permet de conclure que la charge de calcul de la méthode TSM est de 3 à 4 fois plus faible pour les cas considérés, soit des profils oscillants en régime non visqueux et turbulent. Ainsi, les objectifs de ce projet sont atteints, c'est-à-dire que la méthode proposée permet d'obtenir les mêmes solutions que la méthode de référence (*Dual Time Stepping*) à un coût de calcul significativement plus faible.

5.2 Limitations de la solution proposée

La méthode fréquentielle présentée dans ce mémoire utilise une discrétisation en série de Fourier pour une seule fréquence dominante. Cette méthode n'est donc pas applicable aux phénomènes ayant plusieurs fréquences qui ne sont pas des harmoniques.

Aussi, l'utilisation d'un schéma de résolution Runge-Kutta explicite demeure recommandée en raison de sa robustesse. En effet, le schéma LU-SGS implémenté pour la méthode *Time Spectral* s'avère instable pour les phénomènes de fréquence élevée ou lorsqu'un nombre élevé de modes est considéré. Cette limitation est probablement attribuable au traitement explicite du terme source temporel.

Finalement, aucune méthode permettant de traiter les cellules masquées/calculées dynamiquement dans une approche de maillage chimère n'est implémentée. Ainsi, les maillages

chimères doivent être construits afin d’éviter la présence de telles cellules. Cette limitation peut être problématique lorsque des déplacements relatifs de grande amplitude sont simulés.

5.3 Améliorations futures

Afin de permettre le calcul de phénomènes multifréquentiels, les méthodes proposées par Guédeney *et al.* (2013), Ekici et Hall (2007) et Gopinath *et al.* (2007) peuvent être implémentées. L’implémentation d’une discrétisation en temps hybride (Mavriplis et Yang, 2011) permettrait de traiter les phénomènes ayant une composante transitoire.

Un autre axe de développement important pour le solveur NSCODE est l’implémentation de solveurs implicites plus performants. En effet, bien que le solveur LU-SGS fonctionne bien pour les écoulements stationnaires, son application avec la méthode TSM peut s’avérer instable. Une piste de solution se trouve du côté des solveurs GMRES (Mundis et Mavriplis, 2013, 2014). Un gain important d’efficacité peut aussi être obtenu en utilisant l’adaptation du nombre de modes à travers le domaine de calcul proposée par Mosahebi et Nadarajah (2013). Cette méthode, bien qu’elle demande des modifications importantes au code, permettrait de réduire le nombre d’instances de temps calculées dans les zones où l’écoulement varie peu en temps.

La flexibilité de l’utilisation des schémas en série de Fourier peut aussi être améliorée en ajoutant un traitement particulier des cellules masquées/calculées dynamiquement dans les maillages chimères, comme les méthodes proposées par Leffell *et al.* (2013) et Mavriplis *et al.* (2012).

RÉFÉRENCES

- BESEM, F. M., KAMRASS, J. D., THOMAS, J. P., TANG, D., et KIELB, R. E., “Vortex-induced vibration and frequency lock-in of an airfoil at high angles of attack”, *Journal of Fluids Engineering, Transactions of the ASME*, vol. 138, no. 1, 2016. DOI : 10.1115/1.4031134
- BESEM, F., THOMAS, J., KIELB, R., et DOWELL, E., “An aeroelastic model for vortex-induced vibrating cylinders subject to frequency lock-in”, *Journal of Fluids and Structures*, vol. 61, pp. 42-59. 2016. DOI : 10.1016/j.jfluidstructs.2015.10.009
- BLAZEK, J., *Computational Fluid Dynamics : Principles and Applications*, 3e éd. Elsevier, 2005.
- BRUNET, V. et DECK, S., “Zonal-detached eddy simulation of transonic buffet on a civil aircraft type configuration”, dans *Advances in Hybrid RANS-LES Modelling*. Springer, 2008, pp. 182-191. En ligne : https://link.springer.com/chapter/10.1007%2F978-3-540-77815-8_19
- CAGNONE, J.-S. et NADARAJAH, S. K., “Implicit nonlinear frequency-domain spectral-difference scheme for periodic euler flow”, *AIAA Journal*, vol. 47, no. 2, pp. 361-372. 2009. DOI : 10.2514/1.37978
- CAGNONE, J., SERMEUS, K., NADARAJAH, S., et LAURENDEAU, E., “Implicit multi-grid schemes for challenging aerodynamic simulations on block-structured grids”, *Computers & Fluids*, vol. 44, no. 1, pp. 314-327. 2011. DOI : 10.1016/j.compfluid.2011.01.014
- CLARK, W. et HALL, K., “A time-linearized navier-stokes analysis of stall flutter”, dans *ASME 1999 International Gas Turbine and Aeroengine Congress and Exhibition*, Indianapolis, Indiana, United States, Paper No. 99-GT-383, 2000. DOI : 10.1115/1.1303073
- CUSTER, C., “A nonlinear harmonic balance solver for an implicit cfd code : Overflow 2”, Thèse de Doctorat, Departement of Mechanical Engineering and Material Science, Duke University, Durham, North Carolina, United States, 2009. En ligne : <http://dukespace.lib.duke.edu/dspace/handle/10161/1347>
- DA RONCH, A., MCCRACKEN, A., BADCOCK, K., WIDHALM, M., et CAMPOBASSO,

- M., “Linear frequency domain and harmonic balance predictions of dynamic derivatives”, *Journal of Aircraft*, vol. 50, no. 3, pp. 694-707. 2013. DOI : 10.2514/1.C031674
- DANDOIS, J., “Experimental study of transonic buffet phenomenon on a 3d swept wing”, *Physics of Fluids*, vol. 28, no. 1, 2016. DOI : 10.1063/1.4937426
- DECK, S., “Numerical simulation of transonic buffet over a supercritical airfoil”, *AIAA Journal*, vol. 43, no. 7, pp. 1556-1566. 2005. DOI : 10.2514/1.9885
- DJEDDI, R. et EKICI, K., “Resolution of gibbs phenomenon using a modified pseudo-spectral operator in harmonic balance cfd solvers”, *International Journal of Computational Fluid Dynamics*, vol. 30, no. 7-10, pp. 495-515. 2016. DOI : 10.1080/10618562.2016.1242726
- EDWARDS, J. et CHANDRA, S., “Comparison of eddy viscosity-transport turbulence models for three-dimensional, shock-separated flowfields”, *AIAA Journal*, vol. 34, no. 4, pp. 756-763. 1996. DOI : 10.2514/3.13137
- EKICI, K. et HALL, K. C., “Nonlinear analysis of unsteady flows in multistage turbomachines using harmonic balance”, *AIAA Journal*, vol. 45, no. 5, pp. 1047-1057. 2007. DOI : 10.2514/1.22888
- EKICI, K. et HALL, K. C., “Nonlinear frequency-domain analysis of unsteady flows in turbomachinery with multiple excitation frequencies”, *AIAA Journal*, vol. 46, no. 8, pp. 1912-1920. 2008. DOI : 10.2514/1.26006
- EKICI, K., KIELB, R. E., et HALL, K. C., “Aerodynamic asymmetry analysis of unsteady flows in turbomachinery”, *Journal of Turbomachinery*, vol. 132, no. 1, 2010. DOI : 10.1115/1.3103922
- GOPINATH, A. K. et JAMESON, A., “Time spectral method for periodic unsteady computations over two- and three- dimensional bodies”, dans *43rd AIAA Aerospace Sciences Meeting and Exhibit*, Reno, NV, United States, AIAA Paper 2005-1220, 2005. DOI : 10.2514/6.2005-1220
- GOPINATH, A. K. et JAMESON, A., “Application of the time spectral method to periodic unsteady vortex shedding”, dans *44th AIAA Aerospace Sciences Meeting*, Reno, NV, United States, AIAA Paper 2006-0449, 2006. DOI : 10.2514/6.2006-449
- GOPINATH, A. K., VAN DER WEIDE, E., ALONSO, J. J., JAMESON, A., EKICI, K., et HALL, K. C., “Three-dimensional unsteady multi-stage turbomachinery simulations

using the harmonic balance technique”, dans *45th AIAA Aerospace Sciences Meeting*, Reno, NV, United States, AIAA Paper 2007-892, 2007. DOI : 10.2514/6.2007-892

GROSSI, F., BRAZA, M., et HOARAU, Y., “Prediction of transonic buffet by delayed detached-eddy simulation”, *AIAA Journal*, vol. 52, no. 10, pp. 2300-2312. 2014. DOI : 10.2514/1.J052873

GUÉDENEY, T., GOMAR, A., GALLARD, F., SICOT, F., DUFOUR, G., et PUIGT, G., “Non-uniform time sampling for multiple-frequency harmonic balance computations”, *Journal of Computational Physics*, vol. 236, pp. 317-345. 2013. DOI : 10.1016/j.jcp.2012.11.010

HALL, K. C. et CRAWLEY, E. F., “Calculation of unsteady flows in turbomachinery using the linearized euler equations”, *AIAA journal*, vol. 27, no. 6, pp. 777-787. 1989. DOI : 10.2514/3.10178

HALL, K. C., THOMAS, J. P., et CLARK, W., “Computation of unsteady nonlinear flows in cascades using a harmonic balance technique”, *AIAA Journal*, vol. 40, no. 5, pp. 879-886. 2002. DOI : 10.2514/2.1754

HALL, K. C., EKICI, K., THOMAS, J. P., et DOWELL, E. H., “Harmonic balance methods applied to computational fluid dynamics problems”, *International Journal of Computational Fluid Dynamics*, vol. 27, no. 2, pp. 52-67. 2013. DOI : 10.1080/10618562.2012.742512

HASSAN, D. et SICOT, F., “A time-domain harmonic balance method for dynamic derivatives predictions”, dans *49th AIAA Aerospace Sciences Meeting*, Orlando, Florida, United States, AIAA Paper 2011-1242, 2011. DOI : 10.2514/6.2011-1242

HOWISON, J. et EKICI, K., “Dynamic stall analysis using harmonic balance and correlation-based - re θ_t transition models for wind turbine applications”, *Wind Energy*, vol. 18, no. 12, pp. 2047-2063. 2015. DOI : 10.1002/we.1803

HUANG, H. et EKICI, K., “Stabilization of high-dimensional harmonic balance solvers using time spectral viscosity”, *AIAA Journal*, vol. 52, no. 8, pp. 1784-1794. 2014. DOI : 10.2514/1.J052698

IOVNOVICH, M. et RAVEH, D., “Reynolds-averaged navier-stokes study of the shock-buffet instability mechanism”, *AIAA Journal*, vol. 50, no. 4, pp. 880-890. 2012. DOI : 10.2514/1.J051329

IOVNOVICH, M. et RAVEH, D. E., “Numerical study of shock buffet on three-dimensional wings”, *AIAA Journal*, vol. 53, no. 2, pp. 449-463. 2015. DOI : 10.2514/1.J053201

JACQUIN, L., MOLTON, P., DECK, S., MAURY, B., et SOULEVANT, D., “Experimental study of shock oscillation over a transonic supercritical profile”, *AIAA Journal*, vol. 47, no. 9, pp. 1985-1994. 2009. DOI : 10.2514/1.30190

JAMESON, A., *Transonic flow calculations for aircraft*. Berlin, Heidelberg : Springer, 1985, pp. 156-242. DOI : 10.1007/BFb0074531

JAMESON, A., “Time dependent calculations using multigrid, with applications to unsteady flows past airfoils and wings”, dans *10th Computational Fluid Dynamics Conference*, Honolulu, HI, United States, AIAA Paper 1992-1596, 1991. DOI : 10.2514/6.1991-1596

JAMESON, A., *Multigrid algorithms for compressible flow calculations*. Springer, 1986, pp. 166-201. DOI : 10.1007/BFb0072647

JAMESON, A. et BAKER, T., “Solution of the euler equations for complex configurations”, dans *6th Computational Fluid Dynamics Conference*, Danvers, Massachusetts, United States, AIAA Paper 1983-1929, 1983. DOI : 10.2514/6.1981-1259

JAMESON, A. et YOON, S., “Lower-upper implicit schemes with multiple grids for the euler equations”, *AIAA journal*, vol. 25, no. 7, pp. 929-935. 1987. DOI : 10.2514/3.9724

JAMESON, A., SCHMIDT, W., et TURKEL, E., “Numerical solution of the euler equations by finite volume methods using runge kutta time stepping schemes”, dans *14th fluid and plasma dynamics conference*, Palo Alto, California, United States, AIAA Paper 1981-1259, 1981.

KIELB, R. E., HALL, K. C., SPIKER, M., THOMAS, J. P., PRATT JR, E. T., et JEFFRIES, R., “Non-synchronous vibration of turbomachinery airfoils”, Duke University, Durham, North Carolina, United States, Rapp. tech. F49620-03-1-0204, 2006.

LANDON, R., “Compendium of unsteady aerodynamic measurements”, North Atlantic Treaty Organization, Neuilly-sur-Seine, France, Rapp. tech. AGARD-R-702, 1982. En ligne : <http://www.dtic.mil/dtic/tr/fulltext/u2/a121013.pdf>

LEFFELL, J. I., “An overset time-spectral method for relative motion”, Thèse de Doctorat, Department of aeronautics and astronautics, Stanford University, 2014. En ligne : <https://oatd.org/oatd/record?record=oai%5C%3Aurl.stanford.edu%5C%3Aps823bf7552>

LEFFELL, J., MURMAN, S., et PULLIAM, T., “An extension of the time-spectral method to overset solvers”, dans *51st AIAA Aerospace Sciences Meeting*, Grapevine, Texas, United States, AIAA Paper 2013-0637, 2013. DOI : 10.2514/6.2013-637

LÉVESQUE, A. T., “Development of an overset structured 2d rans/urans navier-stokes solver using an implicit and non-linear frequency domain time operators”, Mémoire de maîtrise, Département de génie mécanique, Polytechnique Montréal, Montréal, Québec, 2015. En ligne : <https://publications.polymtl.ca/1718/>

MAPLE, R., KING, P., ORKWIS, P., et WOLFF, J., “Adaptive harmonic balance method for nonlinear time-periodic flows”, *Journal of Computational Physics*, vol. 193, no. 2, pp. 620-41. 2004. DOI : 10.1016/j.jcp.2003.08.013

MAVRIPLIS, D. J., YANG, Z., et MUNDIS, N., “Extensions of time spectral methods for practical rotorcraft problems”, dans *50th AIAA Aerospace Sciences Meeting*, Nashville, TN, United States, AIAA Paper 2012-0423, 2012. DOI : 10.2514/6.2012-423

MAVRIPLIS, D. et YANG, Z., “Time spectral method for periodic and quasi-periodic unsteady computations on unstructured meshes”, *Mathematical Modelling of Natural Phenomena*, vol. 6, no. 3, pp. 213-236. 2011. DOI : 10.1051/mmnp/20116309

MCDEVITT, J. B. et OKUNO, A. F., “Static and dynamic pressure measurements on a naca 0012 airfoil in the ames high reynolds number facility”, NASA, Ames Research Center, Moffett Field, CA, United State, Rapp. tech. NASA TP2485, 1985. En ligne : <https://ntrs.nasa.gov/search.jsp?R=19850019511>

MCMULLEN, M., “The application of non-linear frequency domain methods to the euler and navier-stokes equations”, Thèse de Doctorat, Department of Aeronautics and Astronautics, Stanford University, 2003. En ligne : <http://aero-comlab.stanford.edu/mcmu/Papers/mcmullen.thesis.pdf>

MEDIDA, S., “Correlation-based transition modeling for external aerodynamic flows”, Thèse de Doctorat, Faculty of the Graduate School of the University of Maryland, College Park, Maryland, pp. 270. 2014. En ligne : <http://drum.lib.umd.edu/handle/1903/15150>

MENTER, F., “Two-equation eddy-viscosity turbulence models for engineering applications”, *AIAA journal*, vol. 32, no. 8, pp. 1598-1605. 1994. DOI : 10.2514/3.12149

MENTER, F., LANGTRY, R., LIKKI, S., SUZEN, Y., HUANG, P., et VOLKER, S., “A correlation-based transition model using local variables-part i : Model formulation”,

- Journal of Turbomachinery*, vol. 128, no. 3, pp. 413-422. 2006. DOI : 10.1115/1.2184352
- MOLTON, P., DANDOIS, J., LEPAGE, A., BRUNET, V., et BUR, R., “Control of buffet phenomenon on a transonic swept wing”, *AIAA Journal*, vol. 51, no. 4, pp. 761-772. 2013. DOI : 10.2514/1.J051000
- MOSAHEBI, A. et LAURENDEAU, E., “Introduction of a modified segregated numerical approach for efficient simulation of γ -re θ_t transition model”, *International Journal of Computational Fluid Dynamics*, vol. 29, no. 6-8, pp. 357-375. 2015. DOI : 10.1080/10618562.2015.1093624
- MOSAHEBI, A. et NADARAJAH, S., “An adaptive non-linear frequency domain method for viscous flows”, *Computers & Fluids*, vol. 75, pp. 140-154. 2013. DOI : 10.1016/j.compfluid.2012.12.016
- MOSAHEBI, A. et NADARAJAH, S., “An implicit and adaptive nonlinear frequency domain approach for periodic viscous flows”, *Journal of Computational Physics*, vol. 278, pp. 92-116. 2014. DOI : 10.1016/j.jcp.2014.08.022
- MOSAHEBI, A. et LAURENDEAU, E., “Convergence characteristics of fully and loosely coupled numerical approaches for transition models”, *AIAA Journal*, vol. 53, no. 5, pp. 1399-1404. 2015. DOI : 10.2514/1.J053722
- MUNDIS, N. L. et MAVRIPLIS, D. J., “Gmres applied to the time-spectral and quasi-periodic time-spectral methods”, dans *21st AIAA Computational Fluid Dynamics Conference*, San Diego, CA, United States, AIAA Paper 2013-3084, 2013. DOI : 10.2514/6.2013-3084
- MUNDIS, N. L. et MAVRIPLIS, D. J., “An efficient flexible gmres solver for the fully-coupled time-spectral aeroelastic system”, dans *52nd AIAA Aerospace Sciences Meeting-AIAA Science and Technology Forum and Exposition, SciTech 2014*, National Harbor, MD, United States, AIAA Paper 2014-1427, 2014. DOI : 10.2514/6.2014-1427
- NING, W. et HE, L., “Computation of unsteady flows around oscillating blades using linear and nonlinear harmonic euler methods”, *Journal of Turbomachinery*, vol. 120, no. 3, pp. 508-514. 1998. DOI : 10.1115/97-GT-229
- PIGEON, A., LEVESQUE, A.-T., et E. LAURENDEAU, E., “Two-dimensional navier-stokes flow solver developments at École polytechnique de montréal”, dans *CFD Society of Canada 22nd Annual Conference.*, Toronto, Ontario, Canada, 2014.

PIGEON, A., “Développement d’une méthode d’accélération par grilles virtuelles récursives pour l’assemblage de maillages chimeres”, Mémoire de maîtrise, Département de génie mécanique, Polytechnique Montréal, Montréal, Québec, 2014. En ligne : <https://publications.polymtl.ca/1692/>

PIZIALI, R., “2-d and 3-d oscillating wing aerodynamics for a range of angles of attack including stall”, NASA Ames Research Center, Moffett Field, CA, United States, Rapp. tech. USAATCOM-TR-94-A-011, 1994. En ligne : <https://ntrs.nasa.gov/search.jsp?R=19950012704>

RUMSEY, C., “Turbulence modeling resource”, NASA Langley Research Center, 2016. En ligne : https://turbmodels.larc.nasa.gov/naca0012_val.html

SARTOR, F. et TIMME, S., “Reynolds-averaged navier-stokes simulations of shock buffet on half wing-body configuration”, dans *53rd AIAA Aerospace Sciences Meeting*, Kissimmee, FL, United States, AIAA Paper 2015-1939, 2015. DOI : AIAA Paper 2015-1939

SARTOR, F. et TIMME, S., “Delayed detached-eddy simulation of shock buffet on half wing-body configuration”, dans *22nd AIAA Computational Fluid Dynamics Conference*, Dallas, TX, United States, AIAA Paper 2015-2607, 2015. DOI : AIAA Paper 2015-2607

SHUR, M., STRELETS, M., ZAIKOV, L., GULYAEV, A., KOZLOV, V., et SECUNDOV, A., “Comparative numerical testing of one and two-equation turbulence models for flows with separation and reattachment”, dans *33rd Aerospace Sciences Meeting and Exhibit*, Reno, NV, United States, AIAA Paper 1995-0863, 1995. DOI : 10.2514/6.1995-863

SICOT, F., PUIGT, G., et MONTAGNAC, M., “Block-jacobi implicit algorithms for the time spectral method”, *AIAA Journal*, vol. 46, no. 12, pp. 3080-3089. 2008. DOI : 10.2514/1.36792

SOUICY, O. et NADARAJAH, S. K., “A nlfd method for the simulation of periodic unsteady flows for overset meshes”, dans *19th AIAA Computational Fluid Dynamics Conference*, San Antonio, TX, United States, AIAA Paper 2009-4271, 2009. DOI : 10.2514/6.2009-4271

SPALART, P. R., “Trends in turbulence treatments”, dans *Fluids 2000 Conference and Exhibit*, Denver, CO, United States, AIAA Paper 2000-2306, 2000. DOI : 10.2514/6.2000-2306

SPALART, P. et ALLMARAS, S., “A one-equation turbulence model for aerodynamic

flows”, dans *30th aerospace sciences meeting and exhibit*, Reno, NV, AIAA Paper 1992-0439, pp. 439. 1992. DOI : 10.2514/6.1992-439

SPIKER, M. A., KIELB, R. E., THOMAS, J. P., et HALL, K. C., “Application of enforced motion to study 2-d cascade lock-in effect”, dans *47th AIAA Aerospace Sciences Meeting*, Orlando, FL, United States, AIAA Paper 2009-0892, 2009. DOI : 10.2514/6.2009-892

SWANSON, R. C. et TURKEL, E., “Multistage schemes with multigrid for euler and navier-stokes equations”, NASA Langley Research Center, Rapp. tech. NASA Technical Paper 3631, 1997. En ligne : <https://ntrs.nasa.gov/archive/nasa/casi.ntrs.nasa.gov/19970028360.pdf>

THIERY, M. et COUSTOLS, E., “Numerical prediction of shock induced oscillations over a 2d airfoil : Influence of turbulence modelling and test section walls”, *International Journal of Heat and Fluid Flow*, vol. 27, no. 4, pp. 661-670. 2006. DOI : 10.1016/j.ijheatfluidflow.2006.02.013

THOMAS, J. P., CUSTER, C. H., DOWELL, E. H., et HALL, K. C., “Unsteady flow computation using a harmonic balance approach implemented about the overflow 2 flow solver”, dans *19th AIAA Computational Fluid Dynamics Conference*, San Antonio, TX, United States, AIAA Paper 2009-4270, 2009. DOI : 10.2514/6.2009-4270

THOMAS, J., CUSTER, C., DOWELL, E., HALL, K., et CORRE, C., “Compact implementation strategy for a harmonic balance method within implicit flow solvers”, *AIAA Journal*, vol. 51, no. 6, pp. 1374-1381. 2013. DOI : 10.2514/1.J051823

VAN DER WEIDE, E., GOPINATH, A. K., et JAMESON, A., “Turbomachinery applications with the time spectral method”, dans *35th AIAA Fluid Dynamics Conference and Exhibit*, Toronto, ON, Canada, AIAA Paper 2005-4905, 2005. DOI : 10.2514/6.2005-4905

VOS, J., RIZZI, A., CORJON, A., CHAPUT, E., et SOINNE, E., “Recent advances in aerodynamics inside the nsmb (navier stokes multi block) consortium”, dans *36th AIAA Aerospace Sciences Meeting and Exhibit*, Reno, NV, United States, AIAA Paper 1998-0225, 1998. DOI : 10.2514/6.1998-225

WEISS, J. M., SUBRAMANIAN, V., et HALL, K. C., “Simulation of unsteady turbomachinery flows using an implicitly coupled nonlinear harmonic balance method”, dans *Proceedings of the ASME Turbo Expo*, vol. 7, no. PARTS A, B, AND C, Vancouver, BC, Canada, pp. 1405-1412. 2011. DOI : 10.1115/GT2011-46367

WILLIAMSON, C., “Defining a universal and continuous strouhal-reynolds number relationship for the laminar vortex shedding of a circular cylinder”, *Physics of Fluids*, vol. 31, no. 10, pp. 2742-2744. 1988. DOI : 10.1063/1.866978

WOODGATE, M. et BADCOCK, K., “Implicit harmonic balance solver for transonic flow with forced motions”, *AIAA Journal*, vol. 47, no. 4, pp. 893-901. 2009. DOI : 10.2514/1.36311

WOODGATE, M. et BARAKOS, G., “Implicit computational fluid dynamics methods for fast analysis of rotor flows”, *AIAA Journal*, vol. 50, no. 6, pp. 1217-1244. 2012. DOI : 10.2514/1.J051155

YOON, S. et JAMESON, A., “Lower-upper symmetric-gauss-seidel method for the euler and navier-stokes equations”, *AIAA journal*, vol. 26, no. 9, pp. 1025-1026. 1988. DOI : 10.2514/3.10007